MPSI 1

Mathématiques
DS 01

Samedi 20 septembre – 8h-10h

- Durée : 2 heures.
- Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
- Le sujet est composé de questions de cours, d'un exercice et d'un problème. Le barème **indicatif** est le suivant

Exercice 1 (cours)	Exercice 2	Problème
4,5	4,5	11

- Le sujet est **très long** : il **ne faut pas** essayer de tout faire. Un sujet long vous permet de **choisir** ce qui vous inspire le plus. Repérez les questions indépendantes, les parties indépendantes des autres, etc.
- Prenez **5-10 minutes** pour lire le sujet en entier et décider de la stratégie que vous adopterez.
- **Encadrez, soulignez vos résultats** et **numérotez vos pages**.
- À tout moment, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour pouvoir continuer : il suffit de le préciser clairement sur la copie.
- Si vous voyez ce qui semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur la copie.
- Essayez de changer de copie, au moins de page, lorsque vous changez d'exercice.
- Laissez de la place dans une marge à gauche pour pouvoir noter plus facilement le devoir.
- Une réponse fausse, si elle ne laisse pas paraître de calculs intermédiaires, compte 0 points ; avec calculs intermédiaires elle peut rapporter quelques points.

♫ Bon courage ! ♫

Exercice 1. *Questions de cours et exercices faits en classe.*

1. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. Nier $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

2. Factoriser $a^4 - b^4$.

3. Soit x un réel. Définir $|x|$ et $\lfloor x \rfloor$.

4. Soient θ et φ deux réels. Linéariser $\sin(\theta)\cos(\varphi)$.

5. Soient θ et φ deux réels. Factoriser $\sin(\theta) + \sin(\varphi)$.

6. Déterminer les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n.$$

Correction

L'équation caractéristique de la relation de récurrence est $r^2 = 4r - 4$, c'est-à-dire $r^2 - 4r + 3 = 0$, de racines 1 et 3. Ainsi, les suites vérifiant cette relation de récurrence sont les suites de la forme

$$u_n = \lambda + \mu 3^n.$$

7. (exercice d'application) On admet que si $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite **indexée sur** $\mathbb{Z}$ vérifiant la relation de récurrence de la question précédente, alors elle est de la forme que vous venez de trouver. Déduire de la question précédente toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous entiers n, k :

$$f(n+k) + 3f(n-k) = 4f(n).$$

Correction

Analyse. Soit f une solution de l'équation. En évaluant en en n quelconque et en $k = 1$, on remarque que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $f(n+1) = -3f(n-1) + 4f(n)$, ce qui est exactement la relation de la question précédente. Donc on dispose de λ et μ réels vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \ f(n) = \lambda + \mu 3^n.$$

Synthèse. Soient λ et μ des réels et $f : n \mapsto \lambda + \mu 3^n$. Soient n et k des entiers relatifs. Alors

$$\begin{aligned} f(n+k) + 3f(n-k) &= \lambda + \mu 3^{n+k} + 3\lambda + 3\mu 3^{n-k} \\ &= 4\lambda + \mu 3^n \left(3^k + 3^{1-k}\right). \end{aligned}$$

Et là, problème (que vous devez aussi avoir), ça ne marche pas, ça n'est pas égal à $4f(n)$... En fait, l'**analyse** n'est pas finie.
Fin de l'analyse. On prend $n = 0$ et $k = 2$, on obtient $f(2) + 3f(-2) = 4f(0)$, d'où

$$\lambda + 9\mu + 3\lambda + \frac{\mu}{3} = 4\lambda + 4\mu,$$

d'où $\frac{18}{3}\mu = 0$, d'où $\mu = 0$. Finalement, f est constante.
Synthèse (la vraie). Les fonctions constantes conviennent bien.

Exercice 2. *Identités avec des coefficients binomiaux*.

1. Soit $(m, r, k) \in \mathbb{N}^3$ tels que $k \leqslant m \leqslant r$. Montrer que

$$\binom{r}{m}\binom{m}{k} = \binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$$

Que donne le cas particulier $k = 1$?

Correction

On calcule

$$\begin{aligned}\binom{r}{m}\binom{m}{k} &= \frac{r!}{m!(r-m)!}\frac{m!}{k!(m-k)!}\\ &= \frac{r!}{(r-m)!k!(m-k)!}\\ &= \frac{r!}{k!(r-k)!}\frac{(r-k)!}{(r-m)!(r-k-(r-m))!}\\ &= \binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}.\end{aligned}$$

2. Soit $(r, n) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$$

Correction

Là, on peut se demander si on doit utiliser la question précédente. Mais, **en lisant la question suivante**, on remarque qu'elle va utiliser les deux premières questions. On va donc juste faire une preuve par récurrence sur n. On fixe r et on démontre que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n} \qquad (\mathcal{P}_n)$$

L'**initialisation** est claire : $\binom{r}{0} = 1 = \binom{r+1}{0}$.
Pour l'**hérédité**, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{r+k}{k} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{r+k}{k} + \binom{r+n+1}{n+1}\\ &= \binom{r+n+1}{n} + \binom{r+n+1}{n+1}\\ &= \binom{r+n+2}{n+1} \text{ par la formule du triangle de Pascal,}\end{aligned}$$

ce qui achève l'**hérédité** et permet d'obtenir le résultat.

3. Soient n, m deux entiers naturels tels que $n \geqslant m$. Simplifier

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}}$$

Correction

Là, on va utiliser les deux questions précédentes. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}} &= \sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{n-k}{m-k}}{\binom{n}{m}} \text{ par la première question.}\\ &= \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{k=0}^{m} \binom{n-k}{m-k}.\end{aligned}$$

On fait le changement d'indice $\ell = m-k$. Quand $k=0$, $\ell = m$. Quand $k=m$, $\ell = 0$. De plus,

$$\binom{n-k}{m-k} = \binom{n-(m-\ell)}{\ell} = \binom{n-m+\ell}{\ell}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}} &= \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{\ell=0}^{m} \binom{n-m+\ell}{\ell} \qquad = \frac{1}{\binom{n}{m}} \binom{n-m+m+1}{m+1}\\ &= \frac{m!(n-m)!}{n!} \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m)!}\\ &\boxed{= \frac{n+1}{m+1}.}\end{aligned}$$

Amusant, non ?

Problème 1. Autour de l'inégalité arithmético-géométrique

Le but de ce problème est de voir plusieurs preuves et une application de l'inégalité arithmético-géométrique : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \ \prod_{i=1}^{n} x_i \leqslant \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \right)^n . \qquad (\mathrm{IAG}_n)$$

On peut reformuler (IAG_n) *en :* $\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \ \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$ *si besoin.*

A. Deux premiers cas

1. COURS Énoncer la proposition IAG_2 et démontrer cette inégalité.

Correction

La proposition IAG_2 est

$$\forall (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}_+)^2, \ x_1 x_2 \leqslant \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 .$$

Soit $(x_1, x_2) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Alors

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 - x_1 x_2 &= \frac{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}{4} - \frac{4x_1x_2}{4} \\ &= \frac{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}{4} \\ &\boxed{= \frac{(x_1 - x_2)^2}{4} \geqslant 0,} \end{aligned}$$

d'où l'inégalité.

2. Si l'un des réels $(x_1, \dots, x_n)$ est nul, pourquoi (IAG_n) est-elle évidente ?

Correction

Si l'un des réels est nul, le produit $x_1 \dots x_n$ est nul, donc nécessairement inférieur ou égal à $\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^n$.

B. Une première preuve

Correction

On présente ici la preuve due à Cauchy.

Soit $(\mathcal{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un prédicat indexé sur les entiers naturels. On suppose que $\begin{cases} \textbf{(i)} & \mathcal{P}_2 \text{ est vraie,} \\ \textbf{(ii)} & \forall n \in \mathbb{N}, \ \mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{2n}, \\ \textbf{(iii)} & \forall n \in \mathbb{N}, \ \mathcal{P}_{n+1} \Rightarrow \mathcal{P}_n. \end{cases}$

3. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.
On pourra procéder par récurrence forte.

Correction

Initialisation. Par hypothèse, $\mathcal{P}_2$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 3$, tel que $\mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_{n-1}$ soient vraies. Alors

- si n est pair, comme $\dfrac{n}{2} < n$, $\mathcal{P}_{\frac{n}{2}}$ est vraie par hypothèse de récurrence, donc $\mathcal{P}_n$ aussi.
- si n est impair, alors, comme $2 \leqslant \dfrac{n+1}{2} < n$, $\mathcal{P}_{\frac{n+1}{2}}$ est vraie. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie par **(ii)** donc, par **(iii)**, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

D'où l'hérédité, et le résultat !

4. Démontrer que (IAG_n) satisfait les trois propriétés (i), (ii) et (iii), et conclure que l'inégalité arithmético-géométrique est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Indication. Pour (iii), on pourra remarquer l'égalité $\dfrac{a + b + \frac{a+b}{2}}{3} = \dfrac{a+b}{2}$, *et la généraliser.*

Correction

- déjà, (IAG_2) est vraie, on l'a prouvé.
- **Ensuite,** soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que (IAG_n). Démontrons IAG_{2n}.
Soit $(x_1, \ldots, x_{2n}) \in (\mathbb{R}_+^*)^{2n}$. Alors

$$\begin{aligned}\sqrt[2n]{x_1 \ldots x_{2n}} &= \sqrt{\sqrt[n]{x_1 \ldots x_{2n}}}\\ &= \sqrt{\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \times \sqrt[n]{x_{n+1} \ldots x_{2n}}}\\ &\leqslant \frac{\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} \ldots x_{2n}}}{2} \text{ par } \mathcal{P}_2\\ &\leqslant \frac{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} + \frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}}{2} \text{ par } \mathcal{P}_n\\ &\leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_{2n}}{2n},\end{aligned}$$

d'où (IAG_{2n}).
- **Enfin,** soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que (IAG_{n+1}). Démontrons (IAG_n).
Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Alors, en posant $x_{n+1} = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$, par $\mathcal{P}_{n+1}$,

$$\sqrt[n+1]{x_1 \ldots x_n x_{n+1}} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_{n+1}}{n+1},$$

mais

$$\frac{x_1 + \cdots + x_{n+1}}{n+1} = \frac{(x_1 + \cdots + x_n) + x_{n+1}}{n+1} = \frac{n x_{n+1} + x_{n+1}}{n+1} = x_{n+1}.$$

Donc $\sqrt[n+1]{x_1 \ldots x_n x_{n+1}} \leqslant x_{n+1}$, soit $x_1 \ldots x_n x_{n+1} \leqslant x_{n+1}^{n+1}$. Ainsi,

$$x_1 \ldots x_n \leqslant x_{n+1}^n \text{ d'où } \boxed{\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leqslant x_{n+1}.}$$

La proposition IAG_n est ainsi démontrée.

D'où, par la question précédente, (IAG_n) pour tout n dans $\mathbb{N}$.

C. Une deuxième preuve

Correction

On présente ici une deuxième preuve sue à Schlömich à la fin du XIX^e siècle.

5. Soit n dans $\mathbb{N}$. Déterminer a, b et c dans $\mathbb{R}$ tels que pour tout z dans $\mathbb{R}$,

$$(1-z)^2 \left(1 + 2z + 3z^2 + \ldots + nz^{n-1}\right) = a + bz^n + cz^{n+1}.$$

Correction

Soit z dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}(1-z)^2\left(1+2z+3z^2+\ldots+nz^{n-1}\right) &= (1-2z+z^2)\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)z^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)z^k - 2\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)z^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)z^{k+2}.\end{aligned}$$

On fait un changement d'indice dans la deuxième somme $\ell = k+1$ et un autre dans la troisième $m = k+2$, et on obtient

$$\begin{aligned}(1-z)^2\left(1+2z+3z^2+\ldots+nz^{n-1}\right) & \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)z^k - 2\sum_{k=1}^{n} kz^k + \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)z^k \\ &= 1+2z-2z-2nz^n+(n-1)z^n+nz^{n+1}+\sum_{k=2}^{n-1}(k+1)z^k-2kz^k+(k-1)z^k \\ &\boxed{= 1-(n+1)z^n+nz^{n+1}.}\end{aligned}$$

6. En déduire que pour tout z positif, $1+nz^{n+1} \geqslant (n+1)z^n$, puis que pour tous x et y strictement positifs, $nx+y \geqslant (n+1)\left(x^n y\right)^{\frac{1}{n+1}}$.

Correction

Soit $z \in \mathbb{R}_+$. Comme $(1-z)^2\left(1+2z+3z^2+\ldots+nz^{n-1}\right)$ est positif, $1-(n+1)z^n+nz^{n+1} \geqslant 0$. Donc $\boxed{1+nz^{n+1} \geqslant (n+1)z^n}$.

Soient désormais x et y strictement positifs. En prenant $z = \sqrt[n+1]{\frac{x}{y}}$, on obtient

$$1+n\frac{x}{y} \geqslant (n+1)\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{n}{n+1}},$$

d'où, en multipliant par y,

$$\boxed{y+nx \geqslant (n+1)x^{\frac{n}{n+1}}y^{-\frac{n}{n+1}}y^{\frac{n+1}{n+1}} = (n+1)x^{\frac{n}{n+1}}y^{\frac{1}{n+1}} = (n+1)(x^n y)^{\frac{1}{n+1}}.}$$

7. Démontrer enfin que (IAG_n) est vraie pour tout $n \geqslant 2$.
On pourra procéder par récurrence simple sur n.

Correction

Comme indiqué, démontrons (IAG_n) par récurrence.
L'**initialisation** a déjà été démontrée.
Pour l'**hérédité**, soit n dans $\mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, tel que (IAG_n) est vraie. Soient $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ des réels positifs. Alors, dans l'inégalité précédente, posons $x = \dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ et $y =$

x_{n+1}. On obtient alors

$$\begin{aligned} x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} &\geqslant (x^n y)^{\frac{1}{n+1}} \\ &\geqslant \left(\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right)^n x_{n+1} \right)^{\frac{1}{n+1}} \\ &\geqslant \left(\left(\prod_{i=1}^{n} x_k \right) x_{n+1} \right)^{\frac{1}{n+1}} \quad \text{par hypothèse de récurrence.} \\ &\geqslant \left(\prod_{i=1}^{n+1} x_i \right)^{\frac{1}{n+1}}, \end{aligned}$$

d'où l'hérédité et le résultat.

D. Une application

On note, pour n dans $\mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

8. COURS Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Exprimer $\binom{n}{k}$ comme un produit de k rationnels.

Correction

On sait que

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \cdots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \cdots \times 1}.}$$

9. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, pour tout k dans $[\![0, n]\!]$,

$$\binom{n}{k} \leqslant \left(\frac{(n+1)}{k} H_k - 1 \right)^k.$$

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$ et k dans $[\![0, n]\!]$. Alors

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n \times (n-1) \cdots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \cdots \times 1} \\ &= \prod_{i=1}^{k} \frac{n-i+1}{i} \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{n-i+1}{i} \right)^n \quad \text{par } (\mathrm{IAG}_n). \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{n+1}{i} - 1 \right) \right)^n \\ &\boxed{\leqslant ((n+1)H_k + k)^n.} \end{aligned}$$