MPSI 1

Mathématiques
DS 01

Samedi 20 septembre – 8h-10h

- Durée : 2 heures.
- Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
- Le sujet est composé de questions de cours, d'un exercice et d'un problème. Le barème **indicatif** est le suivant

Exercice 1 (cours)	Exercice 2	Problème
4,5	4,5	11

- Le sujet est **très long** : il **ne faut pas** essayer de tout faire. Un sujet long vous permet de **choisir** ce qui vous inspire le plus. Repérez les questions indépendantes, les parties indépendantes des autres, etc.
- Prenez **5-10 minutes** pour lire le sujet en entier et décider de la stratégie que vous adopterez.
- **Encadrez, soulignez vos résultats** et **numérotez vos pages**.
- À tout moment, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour pouvoir continuer : il suffit de le préciser clairement sur la copie.
- Si vous voyez ce qui semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur la copie.
- Essayez de changer de copie, au moins de page, lorsque vous changez d'exercice.
- Laissez de la place dans une marge à gauche pour pouvoir noter plus facilement le devoir.
- Une réponse fausse, si elle ne laisse pas paraître de calculs intermédiaires, compte 0 points ; avec calculs intermédiaires elle peut rapporter quelques points.

♫ Bon courage ! ♫

Exercice 1. *Questions de cours et exercices faits en classe.*

1. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. Nier $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.
2. Factoriser $a^4 - b^4$.
3. Soit x un réel. Définir $|x|$ et $\lfloor x \rfloor$.
4. Soient θ et φ deux réels. Linéariser $\sin(\theta)\cos(\varphi)$.
5. Soient θ et φ deux réels. Factoriser $\sin(\theta) + \sin(\varphi)$.
6. Déterminer les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n.$$
7. (exercice d'application) On admet que si $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite **indexée sur** $\mathbb{Z}$ vérifiant la relation de récurrence de la question précédente, alors elle est de la forme que vous venez de trouver. Déduire de la question précédente toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous entiers n, k :
$$f(n+k) + 3f(n-k) = 4f(n).$$

Exercice 2. *Identités avec des coefficients binomiaux.*

1. Soit $(m, r, k) \in \mathbb{N}^3$ tels que $k \leqslant m \leqslant r$. Montrer que
$$\binom{r}{m}\binom{m}{k} = \binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$$
Que donne le cas particulier $k = 1$?
2. Soit $(r, n) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$$
3. Soient n, m deux entiers naturels tels que $n \geqslant m$. Simplifier
$$\sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}}$$

Problème 1. Autour de l'inégalité arithmético-géométrique

Le but de ce problème est de voir plusieurs preuves et une application de l'inégalité arithmético-géométrique : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n,\ \prod_{i=1}^{n} x_i \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^n. \qquad (\mathrm{IAG}_n)$$

On peut reformuler (IAG_n) *en :* $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n,\ \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ *si besoin.*

A. Deux premiers cas

1. $\boxed{\text{COURS}}$ Énoncer la proposition IAG_2 et démontrer cette inégalité.

2. Si l'un des réels $(x_1, \ldots, x_n)$ est nul, pourquoi (IAG_n) est-elle évidente ?

B. Une première preuve

Soit $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un prédicat indexé sur les entiers naturels. On suppose que $\begin{cases} \textbf{(i)} & \mathcal{P}_2 \text{ est vraie,} \\ \textbf{(ii)} & \forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{2n}, \\ \textbf{(iii)} & \forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_{n+1} \Rightarrow \mathcal{P}_n. \end{cases}$

3. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.
On pourra procéder par récurrence forte.

4. Démontrer que (IAG_n) satisfait les trois propriétés (i), (ii) et (iii), et conclure que l'inégalité arithmético-géométrique est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.
Indication. Pour (iii), on pourra remarquer l'égalité $\dfrac{a+b+\frac{a+b}{2}}{3} = \dfrac{a+b}{2}$*, et la généraliser.*

C. Une deuxième preuve

5. Soit n dans $\mathbb{N}$. Déterminer a, b et c dans $\mathbb{R}$ tels que pour tout z dans $\mathbb{R}$,

$$(1-z)^2\left(1 + 2z + 3z^2 + \ldots + nz^{n-1}\right) = a + bz^n + cz^{n+1}.$$

6. En déduire que pour tout z positif, $1 + nz^{n+1} \geqslant (n+1)z^n$, puis que pour tous x et y strictement positifs, $nx + y \geqslant (n+1)\left(x^n y\right)^{\frac{1}{n+1}}$.

7. Démontrer enfin que (IAG_n) est vraie pour tout $n \geqslant 2$.
On pourra procéder par récurrence simple sur n.

D. Une application

On note, pour n dans $\mathbb{N}^*$, $H_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

8. $\boxed{\text{COURS}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Exprimer $\dbinom{n}{k}$ comme un produit de k rationnels.

9. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, pour tout k dans $[\![0, n]\!]$,

$$\binom{n}{k} \leqslant \left(\frac{(n+1)}{k}H_k - 1\right)^k.$$