TD 02
Calculs dans $\mathbb{R}$ et trigonométrie

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. *Moyennes arithmétique, géométrique et harmonique.* ●◐○ Soient x et y deux réels positifs, a, g et h les trois réels définis par

$$a = \frac{x+y}{2},\ g = \sqrt{xy},\ \frac{1}{h} = \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}.$$

Comparer a, g et h.

Exercice 2. ●○○ Soient x et y deux réels positifs.

1. (Une inégalité triangulaire) Montrer que $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x}+\sqrt{y}$.

Correction

Comme $\sqrt{x+y}$ et $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ sont deux quantités positives, l'inégalité à démontrer est équivalente à

$$x+y \leqslant x+y+2\sqrt{x}\sqrt{y}.$$

Comme $2\sqrt{x}\sqrt{y} \geqslant 0$, l'égalité est démontrée.

2. En déduire que $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$.

Correction

Supposons $x \geqslant y$. Alors $\sqrt{x} = \sqrt{y+x-y} \leqslant \sqrt{y}+\sqrt{x-y}$, donc $\sqrt{x}-\sqrt{y} \leqslant \sqrt{x-y}$, i.e. $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$.
Supposons $x \leqslant y$. Alors $\sqrt{y} = \sqrt{x+y-x} \leqslant \sqrt{x}+\sqrt{y-x}$, donc $\sqrt{y}-\sqrt{x} \leqslant \sqrt{y-x}$, i.e. $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$.

Exercice 3. ●◐○ Soit $n \geqslant 1$.

1. Montrer que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier pair.

2. En déduire que $\left\lfloor (2+\sqrt{3})^n \right\rfloor$ est un entier impair.

Exercice 4. ●◐○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \text{ et } \|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|.$$

Démontrer que pour tous $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x+y\|_1 \leqslant \|x\|_1 + \|y\|_1 \text{ et } \|x+y\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty .$$

Correction

Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| + |y_i| \text{ par l'inégalité triangulaire} \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1 .
\end{aligned}$$

Notons ensuite $z = x + y = (z_1, \dots, z_n)$. Soit k tel que $|z_k| = \|z\|_\infty$. Alors

$$\|z\|_\infty = |z_k| = |x_k + y_k| \leqslant |x_k| + |y_k| \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

Exercice 5. ●●○ Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $S_n = \prod_{k=0}^{n} \cos(2^k\theta)$. En considérant $\sin(\theta)S_n$, calculer S_n.

Correction

Faisons le calcul (sans récurrence).

$$\begin{aligned}
\sin(\theta)S_n &= \sin(\theta) \times \cos(\theta) \times \cos(2\theta) \times \cos(4\theta) \times \cdots \times \cos(2^n\theta) \\
&= \frac{1}{2}\sin(2\theta)\cos(2\theta) \times \cos(4\theta) \cdots \times \cos(2^n\theta) \\
&= \frac{1}{4}\sin(4\theta)\cos(4\theta)\dots\cos(2^n\theta) \\
&= \dots \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\sin(2^{n+1}\theta).
\end{aligned}$$

Ainsi,

- si $\sin(\theta) = 0$, alors $\theta = 0[\pi]$ donc $S_n = \cos(\theta)$ (tous les autres $\cos(2^k\theta)$ valent 1).
- sinon, $S_n = \dfrac{\sin(2^{n+1}\theta)}{2^{n+1}\sin(\theta)}$.

2 Inégalités dans $\mathbb{R}$

Exercice 6. ●○○ Démontrer que pour tous x et y réels, pour tout $\lambda > 0$, $xy \leqslant \dfrac{x^2}{2\lambda} + \dfrac{\lambda y^2}{2}$.

Correction

Soient x et y deux réels, $\lambda > 0$. Alors

$$\begin{aligned} xy \leqslant \frac{x^2}{2\lambda} + \frac{\lambda y^2}{2} &\Leftrightarrow 2\lambda xy \leqslant x^2 + \lambda^2 y \\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant x^2 + \lambda^2 y - 2\lambda xy = (x - \lambda y)^2, \end{aligned}$$

inégalité qui est toujours vraie ! D'où le résultat.

Exercice 7. ●◐○ Soient a et b deux réels, on note $\max(a, b)$ le maximum des deux nombres a et b.

1. Montrer que

$$\max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2}.$$

Correction

Faisons une disjonction de cas !

- Si $a \leqslant b$, $\max(a, b) = b$, et $|a - b| = b - a$ Donc $\dfrac{a + b + |a - b|}{2} = \dfrac{a + b + b - a}{2} = \dfrac{2b}{2} = b$.
- Si $a \geqslant b$, $\max(a, b) = a$, et $|a - b| = a - b$ Donc $\dfrac{a + b + |a - b|}{2} = \dfrac{a + b + a - b}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$.

2. En déduire une expression avec les valeurs absolues pour $\min(a, b)$, le minimum de a et de b.

Correction

De même, $\min(a, b) = \dfrac{a + b - |a - b|}{2}$.

3. Que vaut $\min(a, b) + \max(a, b)$?

Correction

Résultat à avoir en tête (mais facile à retrouver) : $\min(a, b) + \max(a, b) = a + b$.

Pour tout nombre réel x, on note $x^+ = \max(0, x)$ et $x^- = \max(0, -x)$, appelées respectivement parties positive et négative de x.

4. Exprimer x et $|x|$ en fonction de x^+ et x^-.

Correction

On remarque que $x = x^+ - x^-$ et que $|x| = x^+ + x^-$.
Remarque : cette formule peut être très utile si on a à gérer des **fonctions** de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: on peut alors parler de partie positive et négative de la fonction.

Exercice 8. ●●○ Soient x et y deux réels, n un entier naturel. Comparer $\lfloor x+y \rfloor$ et $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$, et comparer $\lfloor nx \rfloor$ et $n\lfloor x \rfloor$.

Correction

On sait que $\lfloor x \rfloor \leqslant x$ et $\lfloor y \rfloor \leqslant y$, donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant x + y$, donc, comme $\lfloor x+y \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à $x+y$, $\lfloor x+y \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$. On n'a pas égalité en général : prendre $x = y = \dfrac{1}{2}$.

En revanche, on peut montrer que $\lfloor x+y \rfloor - 1 \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor$. En effet, $\lfloor x \rfloor > x-1$ et $\lfloor y \rfloor > y-1$, donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor > x+y-2$. Or, $\lfloor x+y \rfloor \leqslant x+y$, donc $\lfloor x+y \rfloor - 2 < x+y-2 < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor - 1 \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ car les parties entières sont des entiers.
Par une récurrence (que je ne rédige pas là, me demander), on montre que pour tout entier naturel n, $\lfloor nx \rfloor - n \leqslant n\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor nx \rfloor$.

Exercice 9. ●●○ Soit x un réel, soit $m \geqslant 1$ un entier. Montrer que

$$\lfloor mx \rfloor = \sum_{k=0}^{m-1} \left\lfloor x + \frac{k}{m} \right\rfloor.$$

Exercice 10. ●●○ Montrer que pour tout entier n,

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) \leqslant 3 - \frac{1}{n}.$$

Correction

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie, où

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) \leqslant 3 - \frac{1}{n}. \qquad (\mathcal{P}_n)$$

Initialisation. Pour $n = 1$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) = 2 \geqslant 3 - \frac{1}{n}$.
Hérédité. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vrai pour un certain entier n. Alors

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) &= \left(1 + \frac{1}{(n+1)^3}\right) \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) \\ &\geqslant \left(1 + \frac{1}{(n+1)^3}\right)\left(3 - \frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Notre but est alors de montrer que

$$\left(1 + \frac{1}{(n+1)^3}\right)\left(3 - \frac{1}{n}\right) \geqslant 3 - \frac{1}{n+1}.$$

On étudie alors

$$\begin{aligned}
\frac{\left(1+\frac{1}{(n+1)^3}\right)\left(3-\frac{1}{n}\right)}{3-\frac{1}{n+1}} &= \frac{(1+(n+1)^3)(3n-1)}{n(1+n)^2(3(n+1)-1)}\\
&= \frac{(n^3+3n^2+3n+2)(3n-1)}{n(1+2n+n^2)(3n+2)}\\
&= \frac{3n^4+9n^3+9n^2+6n-(1+n^3+3n^2+3n+1)}{(n+2n^2+n^3)(3n+2)}\\
&= \frac{3n^4+8n^3+6n^2+3n-1}{3n^2+6n^3+3n^4+2n+4n^2+2n^3}\\
&= \frac{3n^4+8n^3+6n^2+3n-1}{3n^4+8n^3+6n^2+2n}.
\end{aligned}$$

Or, pour $n \geqslant 1$, $3n-1 \geqslant 2n$, donc $\dfrac{3n^4+8n^3+6n^2+3n-1}{3n^4+8n^3+6n^2+2n} \geqslant 1$, donc

$$\left(1+\frac{1}{(n+1)^3}\right)\left(3-\frac{1}{n}\right) \geqslant 3-\frac{1}{n+1},$$

d'où $\mathcal{P}_{n+1}$.
Conclusion. Héréditaire et vraie au rang 1, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non nul par le principe de récurrence.

Exercice 11. *Inégalité de Cauchy-Schwarz.* ●●○ Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Le but de cet exercice est de montrer

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

On note

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2,\ \ B = \sum_{k=1}^{n} b_k^2,\ \ C = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

1. Soit alors x un réel. Développer $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2$ et l'écrire en fonction de A, B et C.

Correction

On développe l'expression

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2\\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 x^2 + 2a_k x b_k + b_k^2\\
&= x^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2x \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2\\
&= \boxed{Ax^2 + 2Cx + B}.
\end{aligned}$$

2. Déduire de l'étude du signe de la fonction f l'inégalité désirée.

Correction

Par définition, la fonction f étant une somme de carrés, elle est positive ou nulle sur tout $\mathbb{R}$. Mais on a vu en question précédente que f était une fonction polynomiale du second degré, donc $\boxed{\text{son discriminant est négatif}}$, i.e.

$$(2C)^2 - 4AB \leqslant 0,$$

i.e. $\boxed{C^2 \leqslant AB}$, d'où le résultat désiré !

3. Soient a_1, a_2,..., a_n une suite de réels strictement positifs. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geqslant n^2.$$

Correction

C'était une question bien plus délicate ! On remarque que

$$\begin{aligned}
n^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^2 \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)^2 \\
&\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{a_k})^2\right)\left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)^2\right) \quad \text{par l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
&\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right),
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{d'où le résultat désiré !}}$

Exercice 12. ●●● Montrer que pour tous réels strictement positifs (a, b) et que pour tout entier n,

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2^{n+1}$$

Correction

Utilisons la formule du binôme de Newton pour cet exercice. Soient a, b deux réels, n un entier. Posons $x = \dfrac{a}{b}$. Alors

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{x}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x^k + \left(\frac{1}{x}\right)^k\right).
\end{aligned}$$

Or, pour tout réel strictement positif y, $\left(y+\left(\frac{1}{y}\right)\right) \geqslant 2$. En effet,

$$(1-y)^2 \geqslant 0,$$

i.e. $1-2y+y^2 \geqslant 0$, i.e. $1+y^2 \geqslant 2y$, i.e.

$$\frac{1}{y}+y \geqslant 2.$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x^k+\left(\frac{1}{x}\right)^k\right) &\geqslant \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2\\ &= 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\\ &= 2.2^n = 2^{n+1},\end{aligned}$$

d'où le résultat recherché.

3 Trigonométrie

Exercice 13. *Quelques équations trigonométriques*. ●○○ − ●●◐

1. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x dans $\mathbb{R}$, sauf cas à préciser :

(a) $\sin(x) = \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

Correction

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\sin(x) = \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) &\Leftrightarrow x = x+\frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } x = \pi - x - \frac{\pi}{3}[2\pi]\\ &\Leftrightarrow 0 = \frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } 2x = \frac{2\pi}{3}[2\pi]\\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}[\pi]\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

(b) $\sin(2x) = \cos(x)$

Correction

Soit x dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\sin(2x)=\cos(x) &\Leftrightarrow 2\sin(x)\cos(x)=\cos(x)\\ &\Leftrightarrow \cos(x)=0 \text{ ou } 2\sin(x)=1\\ &\Leftrightarrow \cos(x)=0 \text{ ou } \sin(x)=\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}[\pi] \text{ ou } x=\frac{\pi}{6}[2\pi] \text{ ou } x=\frac{5\pi}{6}[\pi]\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est

$$\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

(c) $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

Correction

Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{x}{2}\right) &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}-x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{x}{2}\right)\\ &\Leftrightarrow \frac{3\pi}{4}-x=\frac{x}{2}[2\pi] \text{ ou } \frac{3\pi}{4}-x=-\frac{x}{2}[2\pi]\\ &\Leftrightarrow \frac{3x}{2}=\frac{3\pi}{4}[2\pi] \text{ ou } \frac{x}{2}=\frac{3\pi}{4}[2\pi]\\ &\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}\left[\frac{4\pi}{3}\right] \text{ ou } x=\frac{3\pi}{2}\,[4\pi]\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\left\{\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{3\pi}{2}+4\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

(d) $\sin(x)+\cos(x)=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Correction

Là, il s'agit d'écrire $\sin(x)+\cos(x)$ sous la forme $A\sin(x+\varphi)$.
Supposons qu'un tel A et un tel x existent. Alors

$$A\sin(x+\varphi)=A\sin(x)\cos(\varphi)+A\cos(x)\sin(\varphi).$$

Ainsi, on impose $A\cos(\varphi)=1$ et $A\sin(\varphi)=1$. Ainsi, comme $\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)=1$, $\frac{1}{A^2}+\frac{1}{A^2}=1$, doit $A^2=2$. Donc $A=\sqrt{2}$. Puis on veut $\cos(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin(\varphi)$, soit $\varphi=\frac{\pi}{4}$. L'équation devient alors

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Soit x dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\sin(x)+\cos(x)=\sqrt{\frac{3}{2}} &\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{\frac{3}{2}}\\ &\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } x+\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{3}[2\pi]\\ &\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}[2\pi] \text{ ou } x=\frac{5\pi}{12}[2\pi]\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est

$$\left\{\frac{\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

(e) $\sin(x)+\sqrt{3}\cos(x)=1$

Correction

On fait de même que précédemment. On trouve, par la même technique, que pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\sin(x)+\sqrt{3}\cos(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1 &\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}[2\pi] \text{ ou } x+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}[2\pi]\\ &\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}[2\pi] \text{ ou } x=\frac{3\pi}{6}=\frac{\pi}{2}[2\pi].\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

(f) $\sin(x)+\cos(x)=\sqrt{2}$

Correction

On a déjà vu cette expression ! Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\sin(x)+\cos(x)=\sqrt{2} &\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\\ &\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\\ &\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

(g) $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Correction

Là, il s'agit d'utiliser l'expression $\sin(a)\cos(b)=\frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)$. Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2} &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin(2x)+\frac{1}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&\Leftrightarrow \sin(2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&\Leftrightarrow 2x=\frac{2\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } 2x=\frac{4\pi}{3}[2\pi]\\
&\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}[\pi] \text{ ou } x=\frac{2\pi}{3}[\pi]
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{2\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

(h) $\tan(x)=\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

Correction

Déjà, il faut que $x\neq\frac{\pi}{2}[\pi]$ et $x\neq 0[\pi]$. Soit x vérifiant ces conditions. Alors

$$\tan(x)=\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow \tan(x)=-\frac{1}{\tan(x)}\Leftrightarrow \tan^2(x)=-1.$$

L'ensemble des solutions est donc vide.

(i) $\sqrt{\cos(x)}+\sqrt{\sin(x)}=1$

Correction

Si $x=\frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $x=0[2\pi]$, alors l'égalité est évidente.
Sinon, $\sqrt{\cos(x)}\in]0,1[$ donc $\cos^2(x)<\sqrt{\cos(x)}$ et $\sqrt{\sin(x)}\in]0,1[$ donc $\sin^2(x)<\sqrt{\sin(x)}$. Ainsi, $\sqrt{\cos(x)}+\sqrt{\sin(x)}<\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$, donc $\sqrt{\cos(x)}+\sqrt{\sin(x)}<1$, absurde !
Donc les seules solutions sont $x=\frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $x=0[2\pi]$.

(j) $\cos^2(x)+\cos^2(2x)+\cos^2(3x)=1$

Correction

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\cos^2(x)+\cos^2(2x)+\cos^2(3x) &= \frac{1+\cos(2x)}{2}+\frac{1+\cos(4x)}{2}+\cos^2(3x)\\ &= 1+\frac{\cos(2x)+\cos(4x)}{2}+\cos^2(3x)\\ &= 1+\frac{2\cos(x)\cos(3x)}{2}+\cos^2(3x)\\ &= 1+\cos(x)\cos(3x)+\cos^2(3x).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\cos^2(x)+\cos^2(2x)+\cos^2(3x)=1 &\Leftrightarrow 1+\cos(x)\cos(3x)+\cos^2(3x)=1\\ &\Leftrightarrow \cos(3x)(\cos(x)+\cos(3x))=0\\ &\Leftrightarrow \cos(3x)=0 \text{ ou } \cos(x)=-\cos(3x)\\ &\Leftrightarrow \cos(3x)=0 \text{ ou } \cos(x)=\cos(3x+\pi)\\ &\Leftrightarrow 3x=\frac{\pi}{2}[\pi] \text{ ou } x=3x+\pi[2\pi] \text{ ou } x=-3x-\pi[2\pi]\\ &\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}\left[\frac{\pi}{3}\right] \text{ ou } x=-\frac{\pi}{2}[\pi] \text{ ou } x=-\frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2}\right]\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\left\{\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

2. Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x dans $\mathbb{R}$, sauf cas à préciser :

(a) $\tan(x) \leqslant \sqrt{3}$

Correction

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. Alors

$$\tan(x)\leqslant\sqrt{3}\Leftrightarrow\tan(x)\leqslant\tan\frac{\pi}{3},$$

donc l'ensemble des solutions est

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi\right].$$

(b) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\frac{1}{2}$

Correction

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leqslant \sin\frac{\pi}{6} & \\
&\Leftrightarrow 2x- \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \\
&\Leftrightarrow 2x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right] \\
&\Leftrightarrow xx \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{12} + k\pi, \pi + k\pi\right] \cup \left[\frac{7\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi\right].
\end{aligned}$$

(c) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

Correction

Soit $x \in \mathbb{R}$. Déjà,

$$\begin{aligned}
&\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\
&\Leftrightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) \leqslant \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\
&\Leftrightarrow 0 \leqslant \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) \\
&\Leftrightarrow 0 \leqslant -2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{4} - x\right)\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{4} + x\right) \\
&\Leftrightarrow 0 \geqslant \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{4} - x\right)\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{4} + x\right) \\
&\Leftrightarrow \left[\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \geqslant 0 \text{ et } \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{3\pi}{4}\right) \leqslant 0\right] \text{ ou } \left[\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \leqslant 0 \text{ et } \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{3\pi}{4}\right) \geqslant 0\right] \\
&\frac{3\pi}{4} - \frac{x}{2} \in [0, \pi]
\end{aligned}$$

(d) $\sin(x) - \cos(x) \geqslant 1$

Exercice 14. *Valeurs non usuelles de fonctions trigonométriques.* ●◐○

1. En calculant $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, déterminer une valeur de $\cos(7\pi/12)$.

Correction

On remarque que $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{9\pi}{12} - \frac{2\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$, donc

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \\
&= \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}.
\end{aligned}$$

2. Exprimer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$. En déduire une valeur de $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$, puis de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Correction

On a
$$\cos(5\theta) = 16\cos(\theta)^5 - 20\cos(\theta)^3 + 5\cos(\theta).$$
On en déduit, en prenant $\theta = \frac{\pi}{10}$, que
$$0 = 16\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)^5 - 20\left(\frac{\pi}{10}\right)^3 + 5\left(\frac{\pi}{10}\right),$$
donc, comme $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \neq 0$,
$$16\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)^4 - 20\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 + 5 = 0,$$
donc $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est racine de $16x^2 - 20x + 5$, de discriminant $400 - 320 = 80$, d'où deux solutions, $\frac{20 \pm \sqrt{80}}{32} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$. Or, $\frac{\pi}{10} < \frac{\pi}{4}$ donc $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) \geqslant \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$, donc $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$. Finalement,
$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) - 1 = 2\frac{5+\sqrt{5}}{8} - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Exercice 15. ●◐○ Montrer les identités suivantes, en précisant pour quels réels elles sont valides.

1. $\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin(x) + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0.$

Correction

On remarque que
$$\begin{aligned}\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin(x) + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) &= \sin(x)\cos\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\cos(x) + \sin(x) + \sin(x)\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}\cos(x)\\ &= -\frac{1}{2}\sin(x) + \sin(x) - \frac{1}{2}\sin(x) = 0.\end{aligned}$$
Cette égalité est vraie pour tous les réels x.

2. $\tan(x) + \frac{1}{\tan(x)} = \frac{2}{\sin(2x)}$.

Correction

Les deux membres de cette égalité existent dès que $\tan(x)$ est définie et ne s'annule pas, i.e. $x \neq 0\left[\frac{\pi}{2}\right]$, et dès que $\sin(2x)$ ne s'annule pas, i.e. $x \neq 0\left[\frac{\pi}{2}\right]$. Ensuite, si $x \neq 0\left[\frac{\pi}{2}\right]$,
$$\tan(x) + \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin(x)\cos(x)} = \frac{1}{\sin(x)\cos(x)} = \frac{2}{\sin(2x)}.$$

3. $\tan(x) - \dfrac{1}{\tan(x)} = -\dfrac{2}{\tan(2x)}$.

Correction

Les deux membres de cette égalité existent dès que $\tan(x)$ est définie et ne s'annule pas, i.e. $x \neq 0 \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$, et dès que $\tan(2x)$ est définie et ne s'annule pas, i.e. $x \neq 0 \left[\dfrac{\pi}{4}\right]$.
Ensuite, si $x \neq 0 \left[\dfrac{\pi}{4}\right]$,

$$\tan(x) - \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin(x)\cos(x)} = \frac{-\cos(2x)}{\frac{1}{2}\sin(2x)} = -\frac{2}{\tan(2x)}.$$

D'où le résultat.

Exercice 16. ●●◐ Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, pour tous $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ réels,

$$\sum_{(\varepsilon_1\dots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n} \cos\left(\sum_{k=1}^n \varepsilon_k\theta_k\right) = 2^n \prod_{k=1}^n \cos(\theta_k).$$

Correction

L'exercice peut sembler dur à saisir mais il n'est pas si compliqué si on s'y prend bien. L'idée est que dans la somme sur $(\varepsilon_1 \dots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$, il va y avoir des termes de la forme $\cos(a+b)$ et d'autres de la forme $\cos(a-b)$ qui, additionnés, vont se transformer en $2\cos(a)\cos(b)$. L'idée, pour rédiger proprement, est donc de faire une récurrence sur n.
Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ la propositon : $\forall(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{(\varepsilon_1\dots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n} \cos\left(\sum_{k=1}^n \varepsilon_k\theta_k\right) = 2^n \prod_{k=1}^n \cos(\theta_k).$$

Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n$ par récurrence sur n.
Initialisation. Pour $n = 1$. **Soit** $\theta_1 \in \mathbb{R}$. Alors

$$\sum_{\varepsilon_1\in\{-1,1\}} \cos(\varepsilon_1\theta_1) = \cos(-\theta_1) + \cos(\theta_1) = 2\cos(\theta_1),$$

d'où l'initialisation.
Hérédité. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain entier naturel n. Soient alors $(\theta_1, \dots, \theta_n, \theta_{n+1})$

$n+1$ réels. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{(\varepsilon_1\dots,\varepsilon_n,\varepsilon_{n+1})\in\{-1,1\}^{n+1}} \cos\left(\sum_{k=1}^{n+1}\varepsilon_k\theta_k\right) &= \sum_{(\varepsilon_1\dots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n}\ \sum_{\varepsilon_{n+1}\in\{-1,1\}} \cos\left(\sum_{k=1}^{n+1}\varepsilon_k\theta_k\right)\\
&= \sum_{(\varepsilon_1\dots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n}\left[\cos\left(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\theta_k-\theta_{n+1}\right)+\cos\left(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\theta_k+\theta_{n+1}\right)\right]\\
&= \sum_{(\varepsilon_1\dots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n} \times 2\cos\left(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\theta_k\right)\cos(\theta_{n+1})\\
&= 2\cos(\theta_{n+1})\sum_{(\varepsilon_1\dots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n}\times\cos\left(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\theta_k\right)\\
&= 2\cos(\theta_{n+1})\times 2^n\prod_{k=1}^{n}\cos(\theta_k) \text{ par hypothèse de récurrence.}\\
&= 2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}\cos(\theta_k).
\end{aligned}$$

D'où l'hérédité, et le résultat par le principe de récurrence.

Indications

1 Vu que l'on demande de comparer, c'est que l'ordre ne doit pas dépendre de x et de y... tester alors avec $x = 1$ et $y = 2$.

2 **1.** Mettre au carré les deux côtés de l'égalité.
2. Distinguer les cas $x \leqslant y$ et $x \geqslant y$.

3 **1.** Développer et regrouper les k pairs et impairs.
2. Remarquer que $(2 - \sqrt{3})^n$ est un réel dans $]0, 1[$.

4 Pour l'inégalité sur $\|\cdot\|_1$, écrire la somme et utiliser l'inégalité triangulaire. Pour l'inégalité sur $\|\cdot\|_\infty$, penser que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|x_i| \leqslant \|x\|_\infty$.

6 Penser que l'on peut multiplier par 2λ et reconnaître une identité remarquable.

7 **1.** Disjoindre les cas.
2. Changer un $+$ en $-$
3. Faire simplement le calcul.
4.

8 **1.** Démontrer que $\lfloor x+y \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ et penser à des nombres rationnels simples pour montrer qu'on n'a pas égalité.
2. Démontrer que $\lfloor nx \rfloor - n \leqslant n \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor nx \rfloor$.

9 Écrire $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$. Remarquer alors que $\lfloor mx \rfloor = m \lfloor x \rfloor + c$, où c est à déterminer assez précisément.

10 Faire une récurrence : pour l'hérédité, étudier préc'isément la différence de deux termes, développer le numérateur et le dénominateur de la fraction : ne pas avoir peur de calculs un peu gros.

11 **1.** Développer simplement l'expression.
2. Penser qu'un polynôme de degré 2 de signe constant est de discriminant négatif.
3. Utiliser que $1 = \sqrt{a_k} \times \dfrac{1}{\sqrt{a_k}}$.

12 — Poser $x = \dfrac{a}{b}$, utiliser la formule du binôme de Newton.
— Vérifier que pour tout $y > 0$, $y + \dfrac{1}{y} \geqslant 2$.

16 Faire une récurrence sur n.