TD 3
Nombres complexes

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. ●○○ Soient a et b deux nombres complexes de module 1. Montrer que $\dfrac{a+b}{1+ab}$ est un nombre réel.

Exercice 2. *Inégalité triangulaire généralisée.* ●●○ Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que, si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont n complexes non nuls, on a

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|,$$

avec égalité si et seulement si il existe $n-1$ réels strictement positifs $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$z_2 = \lambda_2 z_1, \ldots, z_n = \lambda_n z_1.$$

On précisera **TRÈS PROPREMENT** *l'hypothèse de récurrence à démontrer.*

Exercice 3. ●○○ Extraire les racines suivantes :

1. les racines carrées de $3+4i$.
2. les racines $5^{\text{èmes}}$ de -1.
3. les racines n-ièmes de i ($n \in \mathbb{N}^*$)

Exercice 4. ●●○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}$. Calculer $S_{n,p} = \displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^p$, puis $T_n = \displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} (1+\omega)^n$.

Exercice 5. ●◐○

1. Soit θ un réel non nul. Montrer que $\dfrac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}} = -i\tan\dfrac{\theta}{2}$.
2. Résoudre l'équation $(1+z)^5 = (1-z)^5$.

Exercice 6. *Polynômes de Tchebycheff de première espèce.* ●●○

1. Montrer que pour tout entier n, il existe un polynôme T_n tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta)).$$

On admet la proposition suivante

Proposition 1

Si P et Q sont deux polynômes tels que pour tout θ dans $\mathbb{R}$, $P(\cos(\theta)) = Q(\cos(\theta))$, alors P et Q sont égaux.

En particulier, cette proposition permet d'avoir l'unicité de T_n. Le polynôme T_n est appelé n-ième polynôme de Tchebycheff de première espèce.

2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $T_{n+2}(z) = 2zT_{n+1}(z) - T_n(z)$.
3. Déterminer, par la méthode de votre choix, T_1, T_2, T_3, T_4.

Exercice 7. Soit θ réel et n entier non nul.

1. Factoriser $(z+1)^n - e^{2in\theta}$ pour $z \in \mathbb{C}$.

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 8. *Quelques questions de géométrie*. **1.** Caractériser géométriquement la similitude définie par $z \mapsto (-1-\sqrt{3}i)z + 2 - \sqrt{3} + (2+\sqrt{3})i$.

2. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que les points d'affixes $1+i$, $z+i$ et $1+iz$ soient alignés.

3. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que les points d'affixes z, z^2 et z^3 soient alignés.

Stratégie. Le chapitre sur les nombres complexes a ceci de particulier qu'il reprend de nombreuses notions de Terminale, mais qu'il ajoute plusieurs nouveautés. À faire, dans l'ordre :

- Vérifier que vous savez faire des calculs de base : commencez par les calculs sur j (exercice 9), puis, si vous avez peur de ne pas savoir le faire, quelques calculs « de type Terminale » (exercices 10, 11), un exercice faisant intervenir la caractérisation importante du fait qu'un nombre est réel ou imaginaire (exercice 13).
- Vérifier que vous savez utiliser l'inégalité triangulaire (12) et résoudre une équation du second degré (exercice 16).
- Vérifier que vous savez manipuler les racines de l'unité et la méthode de l'angle moitié : exercices 18 et 19.
- Faire un peu de géométrie (c'est une partie moins importante en MPSI) : quelques items de l'exercice 22 et un peu de l'exercice 23.
- Un conseil : quelques exercices sont plus longs (ce sont des exercices de DM et de DS des années précédentes). Il peut être utile de les travailler quand vous en aurez le temps, pour vous entraîner à augmenter votre efficacité à l'écrit.

2 Généralités : écritures algébrique et géométrique, notions de trigonométrie

Exercice 9. ◐○○ Déterminer l'écriture, sous la forme $\rho e^{i\theta}$, des nombres j, j^{-1}, $\bar{j}$, $1+j$, $1+\bar{j}$, $-1-j$, $1+j+j^2$, $1+j^2+j^4$.

Exercice 10. ◐○○ Déterminer les parties réelle et imaginaire de

$$z_1 = \frac{2-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-2i},\ z_2 = \frac{1+2i}{(2-i)(3+2i)},\ z_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}},\ z_4 = 4e^{-\frac{i\pi}{3}}.$$

Exercice 11. ●○○

1. Déterminer le module et un argument de

$$z_1 = \frac{i\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},\ z_2 = 1+\sin(x) - i\cos(x),\ z_3 = 1 - i\tan(\theta).$$

2. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z_1^3, z_2^4, z_3^n.

Exercice 12. ●◐○ Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$|a| + |b| \leqslant |a+b| + |a-b|\,.$$

Quand y a-t-il égalité ?

Exercice 13. ●◐○ Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $z \in \mathbb{C}$ pour que $\dfrac{z+1}{z-1}$ soit imaginaire pur.

Exercice 14. ●●○ Déterminer les nombres complexes tels que z, $\dfrac{1}{z}$, $1+z$ aient le même module.

Exercice 15. *Autour des entiers de Gauss*. ●●○ On définit l'ensemble $\mathbb{Z}[i]$ comme suit :

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}.$$

1. On se propose de déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ par analyse-synthèse, c'est-à-dire les éléments z de $\mathbb{Z}[i]$ tels qu'il existe $z' \in \mathbb{Z}[i]$ vérifiant $zz' = 1$.
   (a) Soit z inversible dans $\mathbb{Z}[i]$. Déterminer la valeur du module de z.
   (b) Quels sont les éléments de $\mathbb{Z}[i]$ de module 1 ?
   (c) Conclure.

2. On va, dans cette deuxième partie, utiliser $\mathbb{Z}[i]$ pour démontrer le résultat suivant : tout produit de nombres entiers s'écrivant comme somme de deux carrés s'écrit comme une somme de deux carrés.
   (a) Montrer que le produit de deux éléments de $\mathbb{Z}[i]$ est dans $\mathbb{Z}[i]$.
   (b) Soient $m = a^2 + b^2$ et $n = c^2 + d^2$ deux entiers sommes de deux carrés (a, b, c, d sont aussi entiers). Exprimer m et n à l'aide des nombres complexes $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$, et en déduire que mn s'écrit comme somme de deux carrés d'entiers (et expliciter ces entiers en fonction de a, b, c et d).
   (c) Application. Écrire 13, 25, puis 325 comme somme de deux carrés.

3. Terminons par des questions géométriques.
   (a) Soit $ABCD$ un carré, ses sommets ayant pour affixes respectives a, b, c, d. Montrer que si c et d sont dans $\mathbb{Z}[i]$, alors a et b aussi.
   (b) Soit ABC un triangle équilatéral. Montrer que, si a, b et c sont les affixes respectives de A, B et C, alors on ne peut pas avoir $(a, b, c) \in \mathbb{Z}[i]^3$.

3 Résolution d'équations – polynômes – racines de l'unité

Exercice 16. ●○○ Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 - z + i + 1 = 0$

2. $z^6 - 2z^3 \cos(\varphi) + 1 = 0$

Exercice 17. ●◐○ Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $1 + z + z^2 = 0$

2. $(z + i)^3 + iz^3 = 0$

3. $z^2 = -\overline{z}^2$

Exercice 18. ●●○ Soit n un entier naturel non nul. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 19. ●●○ Soit n un entier naturel non nul. Calculer $V_n = \displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |\omega - 1|$.

Exercice 20. *Sur un produit de sinus*. ●●○ Soit n un entier naturel non nul. On veut calculer le produit suivant, noté S_n, et défini par

$$S_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right).$$

On pose R_n et T_n les deux produits suivants

$$R_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \text{ et } T_n = \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$$

1. Démontrer que $S_n = T_n$ à l'aide d'un changement d'indices et en déduire que $S_n = \sqrt{R_n}$.
2. (Un calcul de R_n)
   (a) Déterminer toutes les solutions de l'équation $(z+1)^{2n} - 1 = 0$, d'inconnue z dans $\mathbb{C}$. On notera $z_1, \ldots, z_{2n-1}$ les $2n$ solutions non nulles trouvées.
   (b) Écrire pour tout k le complexe z_k sous forme exponentielle.

   On note $U_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$.

   (c) Démontrer que $U_n = -2^{2n-1} R_n$.
   (d) Montrer que $U_n = -2n$.
   (e) En déduire $S_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

Exercice 21. *Générateurs de $\mathbb{U}_n$.* ●●◐ Soit n un entier naturel non nul. On dit que $\omega \in \mathbb{U}_n$ est une racine primitive n-ième de l'unité si $\mathbb{U}_n = \{\omega, \omega^2, \ldots, \omega^n\}$.

1. Déterminer les racines primitives quatrièmes de l'unité.
2. Déterminer une condition générale pour qu'une racine de l'unité soit primitive.

4 Applications à la géométrie

Exercice 22. ●○○ Trouver dans l'ensemble des points z de $\mathbb{C}$ vérifiant chacune de ces propriétés :

1. Les points d'affixes i, z et iz forment un triangle rectangle isocèle en i.
2. Les points d'affixes z, z^2 et z^3 forment un triangle rectangle en z.
3. Les points d'affixes z, z^2 et z^3 forment un triangle rectangle en z^2.
4. ●●◐ Les points d'affixes z, z^2 et z^3 forment un triangle rectangle en z^3.
5. ●●◐ Les points d'affixes j, z et jz sont alignés.
6. ●●◐ O est l'orthocentre (l'intersection des hauteurs) du triangle formé par les points d'affixe z, z^2 et z^3.

Exercice 23. *Sur les transformations géométriques.* ●◐○

1. Déterminer l'expression complexe de la rotation de centre $i-2$ et d'angle $\pi/3$.
2. Soit r la rotation de centre i et d'angle $\pi/4$, et r' la rotation de centre 1 et d'angle $\pi/4$. Déterminer $r' \circ r$.

Exercice 24. ●●○ Soit ABC un triangle, M le milieu de $[AC]$ et N le milieu de $[AB]$. On note a, b, c les longueurs des côtés opposés respectivement à A, B et C. Montrer que

$$[(BM) \text{ orthogonale à } (CR)] \Leftrightarrow [b^2 + c^2 = 5a^2].$$

Exercice 25. ●●◐ Quels sont les z dans $\mathbb{C}^*$ tels que z et ses racines cubiques forment un parallélogramme ?

Exercice 26. *Un invariant des polygones réguliers.* ●●◐ Soit un polygone régulier à n sommets $S_1, \ldots, S_n$, inscrit dans un cercle de rayon R. Soit M un point de ce cercle. Montrer que la quantité $S_1M^2 + S_2M^2 + \cdots + S_nM^2$ est une grandeur indépendante de M.

Exercice 27. ●●◐ Quelle est l'image du cercle unité par l'application $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$?

Exercice 28. *Étude d'une inversion.* ●●◐ Le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ est identifié au plan complexe et rapporté à un repère orthonormal. Pour tout réel non nul k, on appelle inversion de pôle O et de puissance k la transformation F de $\mathbb{R}^2 \backslash \{O\}$ associée à l'application $f : z \mapsto \dfrac{k}{\overline{z}}$.

1. Soit $M \in \mathbb{R}^2 \backslash \{O\}$. Montrer que O, M et $M' = F(M)$ sont alignés, et que M et M' sont sur la même demi-droite issue de O si et seulement si $k > 0$.
2. Montrer que $OM.OM' = |k|$.
3. Montrer que l'équation complexe d'un cercle est de la forme $z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z + \delta = 0$, où $\omega \in \mathbb{C}^*$ et $\delta \in \mathbb{R}$. Montrer que réciproquement, une telle équation est celle d'un cercle.
4. Soit (Δ) la droite d'équation complexe $\overline{a}z + a\overline{z} + b = 0$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{R}$. Déterminer l'image de (Δ) par F. On pourra commencer par considérer le cas $b = 0$.
5. Soient $\omega \in \mathbb{C}^*$ et $\delta \in \mathbb{R}$. Déterminer l'image par F du cercle (Γ) défini par l'équation $z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z + \delta = 0$.

Exercice 29. ●●○

1. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que, si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont n complexes non nuls, on a
$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|,$$
avec égalité si et seulement si il existe $n-1$ réels strictement positifs $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tels que
$$z_2 = \lambda_2 z_1, \ldots, z_n = \lambda_n z_1.$$

Une application à la géométrie. On se place dans le plan complexe $\mathscr{P}$ d'origine O. Soit un entier $n \geqslant 3$. On considère n points $A_1, \ldots, A_n$ d'affixes respectives $z_1, \ldots, z_n$ tels que

(i) Pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, A_k est distinct de O.

(ii) Les A_k sont deux à deux distincts.

(iii) Il n'existe aucune droite du plan $\mathscr{P}$ contenant tous les A_k.

(iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{|z_k|} = 0$.

2. Donner un exemple de n-uplet $(z_1, \ldots, z_n)$ vérifiant l'égalité précédente.
3. Pour tout k dans $[\![a, n]\!]$, on pose $u_k = \dfrac{z_k}{|z_k|}$. Soit M un point de $\mathscr{P}$ d'affixe z.
   (a) Vérifier que
   $$\sum_{k=1}^{n} \overline{u}_k(z - z_k) = -\sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$
   (b) En déduire l'inégalité (*) ci-dessous
   $$\sum_{k=1}^{n} |z - z_k| \geqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|. \qquad (*)$$
   (c) En utilisant l'inégalité triangulaire généralisée, démontrer que (*) est une égalité si eu seulement si, pour tout k de $[\![1, n]\!]$, $\overline{u}_k(z - z_k)$ est un réel négatif.
   (d) En déduire que l'inégalité (*) est une égalité si et seulement si $z = 0$.
   (e) Établir que la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} MA_k$ atteint son minimum en un unique point M que l'on précisera.

Exercice 30. ●●● Soient trois réels (a, b, c) tels que $e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0$. Montrer qu'alors $e^{2ia} + e^{2ib} + e^{2ic} = 0$.

Indications

1 Penser à deux points fondamentaux :

- un complexe est un réel si et seulement s'il est égal à son conjugué.
- les éléments de $\mathbb{U}$ ont leur conjugué égal à leur inverse.

2 La proposition à démontrer par récurrence est « $\forall (z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$,

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|,$$

avec égalité si et seulement si il existe $n-1$ réels strictement positifs $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que

$$z_2 = \lambda_2 z_1, \dots, z_n = \lambda_n z_1.$$

»

3 **1.** Revoir la méthode du cours (avec deux équations)
2. Écrire -1 sous forme exponentielle.
3. Idem que la question précédente.

4 **1.** pour la première somme, réécrire la somme en l'indexant sur k.
2. pour la deuxième, utiliser le binôme de Newton et intervertir les sommes.

5 **1.** Utiliser la technique de l'angle moitié.
2. Remarquer que 1 n'est pas racine, donc qu'on peut diviser par $(1-z)^5$, et ensuite montrer qu'on est ramenés à une équation du type $x^5 = 1$.

6 **1.** On utilisera les formules d'Euler et le binôme de Newton.
2. Démontrer que la propriété est vraie pour tout θ réel.
3. Utiliser la formule de récurrence ou l'expression de la question 1.

8 **1.** C'est du cours, chercher le point fixe !
2. Penser que l'alginement est lié à la colinéarité ! Ou bien que A, B, C sont alignés ssi $\dfrac{c-a}{b-a}$ est réel (et penser aux caractérisations des réels).
3. Idem

9 Ces calculs ont été faits en cours.

10 Penser à la quantité conjuguée quand il y a des fractions.

11 RAS

12 Appliquer l'inégalité triangulaire à $x = a + b$ et $y = a - b$.

13 Penser, comme dans l'exercice 1, que l'on connaît des conditions pour qu'un nombre soit réel.

?? Utiliser les fomrules d'addition, de duplication, etc.

?? **1.** Utiliser le fait que $\sin(\theta) = \mathfrak{Im}(e^{i\theta})$.
2. Utiliser les formules usuelles de trigonométrie.
3.

14 Faire une analyse synthèse, et montrer dans un premier temps que z est nécessairement de module 1.

15 **1.** (a) Montrer que $|z|^2$ est un entier naturel inversible.
(b) Démontrer qu'il y en a 4.
(c)
2. Tout est guidé dans cette question.
3. (a) Penser au fait qu'e si on connaît 2 points d'un carré, on connaît presque les deux autres.

(b) Penser que si ABC est un triangle équilatéral, alors C est l'image de B par une rotation de centre A.

?? Faire une preuve par récurrence et utiliser les formules d'addition des cosinus.

16 **1.** Il s'agit d'une simple équation du second degré.

2. Il faut déjà résoudre l'équation en $Z = z^3$, puis extraire des racines cubiques.

17 **1.** La première équation est une simple équation du second degré.

2. Pour cette équation, on peut développer, mais aussi se ramener à une recherche de racine cubique d'un certain complexe.

3. Procéder par analyse-synthèse, écrire z sous forme algébrique.

18 Que vaut la somme des termes d'une suite géométrique ?

19 Utiliser la technique de l'angle moitié et une des questions de cours du chapitre.

20 **1.** Attention au changement d'indices ! Poser $\ell = 2n - 1 - k$.

2. (a) Utiliser les racines $2n$-ièmes de l'unité.

(b) Utiliser la technique de l'angle moitié.

(c) Poser $P(z)$ le polynôme $(z+1)^{2n} - 1$, et déterminer le coefficient devant z dans ce polynôme.

(d)

21 **1.**

2. Démontrer que $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ est primitive ssi k est premier avec n. On utlisera le théorème de Bézout.

22 **1.** Penser que ABC est isocèle en A ssi C est l'image de B par une certaine rotation...

2. Penser à l'argument d'un certain quotient.

3. Idem

4. Idem, attention aux calculs !

5. Penser que l'alignement se traduit par le gait qu'un quotient est réel.

6. Pour que O soit l'orthocentre du triangle formé par z, z^2 et z^3, il faut, si on appelle M_1, M_2 et M_3 les points d'affixes z, z^2 et z^3, que (OM_1) soit perpendiculaire à (M_2M_3) et que (OM_2) soit perpendiculaire à (M_1M_3).

23 **1.** C'est du cours.

2. Idem !

24 Penser que l'orthogonalité s'exprime à l'aide d'un rapport !

25 Faire une analyse-synthèse.

26 Penser qu'un polygone régulier à n côtés est nécessairement paramétré par les racines n-ièmes de l'unité.

27 Faire une analyse-synthèse pour montrer qu'il s'agit de la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$.

28 **1.** Démontrer que les arguments des affixes de M et M' sont égaux.

2. Juste un calcul.

3. Partir de l'équation réelle d'un cercle, avec un module au carré, et écrire que $|z|^2 = z\overline{z}$. Pour la réciproque, trouver le centre et le rayon en résolvant un système.

4. Question pas évidente ! Si $b = 0$, montrer que l'image de Δ est Δ. Sinon, montrer que l'image de Δ est le cercle de centre $-\dfrac{ak}{b}$ et de rayon $\left|\dfrac{ak}{b}\right|$.

5. Montrer que si $\delta = 0$, on a une droite, sinon on a un cercle.

29 **1.** Question déjà faite !

2. Penser à $\mathbb{U}_n$.

3. (a) Penser au fait que $z\overline{z} = |z|^2$.
(b) Utiliser l'inégalité triangulaire généralisée.
(c)
(d) Penser que l'inégalité permet de borner cette quantité et que le cas d'égalité indique quand le max est atteint.

30 Uniquement calculatoirement, cet exercice peut s'avérer très difficile. Voir comment cette égalité peut être interprétée d'un point de vue géométrique !