Chapitre 3
Nombres complexes

1 Corps des nombres complexes

1.1 Une idée de la construction

Définition 1 (Pseudo-définition des nombres complexes)

1. On définit $\mathbb{C}$ comme un ensemble contenant $\mathbb{R}$ et contenant un nombre i tel que $i^2 = -1$, tel que tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrire sous la forme $z = a+ib$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
2. L'écriture $z = a + ib$ est unique et on note
$$a = \mathfrak{Re}(z) \text{ et } b = \mathfrak{Im}(z).$$
a est la **partie réelle** de z et b est la **partie imaginaire** de z.
3. $\mathbb{C}$ est appelé corps des nombres complexes.
4. Les réels sont les complexes de partie imaginaire nulle.
5. Les nombres complexes de partie réelle nulle sont appelés imaginaires purs. On note leur ensemble $i\mathbb{R}$.

Remarque 2

1. Ainsi, une égalité entre deux nombres complexes correspond à **deux** égalités entre des nombres réels : égalités des parties réelles et des parties imaginaires.
2. On sent que dans la définition précédente, on n'a pas fait de maths... mais construire les nombres complexes n'est pas si évident :
   - on peut les définir à l'aide de $\mathbb{R}^2$, sur lequel on définit une loi $\oplus$ et une loi $\otimes$ correspondant aux lois de la proposition suivante,
   - on peut les définir à l'aide de matrices 2×2 (on en parlera un peu dans le chapitre sur les matrices)
   - on peut le définir comme la *clôture algébrique* de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire le plus petit *corps algébriquement clos* contenant $\mathbb{R}$, c'est-à-dire le plus petit ensemble avec des lois $+$ et $\times$ tel que tout polynôme admette une racine sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3 (Opérations sur les complexes)

1. $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\mathfrak{Re}(z + z') = \mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Re}(z')$ et $\mathfrak{Im}(z + z') = \mathfrak{Im}(z) + \mathfrak{Im}(z')$.
2. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.
   - si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$,
   $$zz' = (a + ib)(a' + ib') = aa' + aib' + a'ib - bb' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b).$$
   - En d'autres termes,
   $$\mathfrak{Re}(zz') = \mathfrak{Re}(z)\mathfrak{Re}(z') - \mathfrak{Im}(z)\mathfrak{Im}(z'),$$
   $$\mathfrak{Im}(zz') = \mathfrak{Re}(z)\mathfrak{Im}(z') + \mathfrak{Re}(z')\mathfrak{Im}(z).$$

1.2 Conjugaison, module

Définition 4

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe.

1. Le conjugué de z, noté $\overline{z}$, est le nombre complexe
$$\overline{z} = x - iy.$$
2. Le module de z, noté $|z|$, est le nombre réel positif
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Remarque 5

Si on représente $z = a + ib$ dans un plan, $\overline{z}$ est le symétrique de z par rapport à l'axe des abscisses.

Proposition 6

Soit (z, z') des nombres complexes. Alors

1. si z est réel, son module et sa valeur absolue coïncident,
2. $z + \overline{z} = 2\mathfrak{Re}(z)$,
3. $z - \overline{z} = 2i\mathfrak{Im}(z)$,
4. $z\overline{z} = |z|^2$,
5. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$,
6. $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$,
7. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$,
8. si $z \neq 0$, $\overline{\dfrac{1}{z}} = \dfrac{1}{\overline{z}}$,
9. $\overline{\overline{z}} = z$ (on dit que la conjugaison est involutive)
10. $|zz'| = |z||z'|$,

11. Si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$,

12. $|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\mathfrak{Re}(z\overline{z'}) + |z'|^2$

Démonstration

On ne va prouver que le dernier point !

$$\begin{aligned}
|z+z'|^2 &= (z+z')(\overline{z+z'}) \\
&= (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) \\
&= z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} \\
&= |z|^2 + z\overline{z'} + \overline{z\overline{z'}} + |z'|^2 \\
&= |z|^2 + 2\mathfrak{Re}(z\overline{z'}) + |z'|^2
\end{aligned}$$

■

Point de méthode 7

Méthode de la quantité conjuguée. Si l'on doit déterminer la partie réelle d'un nombre complexe qui s'écrit sous la forme $\dfrac{x+iy}{x'+iy'}$, une bonne méthode est celle dite de la quantité conjuguée : on écrit

$$\begin{aligned}
\frac{x+iy}{x'+iy'} &= \frac{x+iy}{x'+iy'} \times \frac{x'-iy'}{x'-iy'} \\
&= \frac{(x+iy)(x'+iy')}{x'^2+y'^2} \\
&= \frac{xx'-yy'}{x'^2+y'^2} + i\frac{xy'+x'y}{x'^2+y'^2}.
\end{aligned}$$

Exercice 8

Calculer les parties réelle et imaginaire de $\dfrac{1}{1+3i}$.

Proposition 9

Soient z et z' des complexes.

1. $|\mathfrak{Re}(z)| \leqslant |z|$, avec égalité ssi $z \in \mathbb{R}$.
   $\mathfrak{Re}(z) \leqslant |z|$ avec égalité ssi $z \in \mathbb{R}_+$.
   $|\mathfrak{Im}(z)| \leqslant |z|$ avec égalité ssi $z \in i\mathbb{R}$.
2. (inégalité de Cauchy[1]-Schwarz[2])

$$\mathfrak{Re}(z\overline{z'}) \leqslant |zz'|$$

avec égalité si et seulement si z et z' sont positivement colinéaires, i.e. $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z' = \lambda z$ ou $z = \lambda z'$.

3. (inégalité triangulaire)
$$|z+z'| \leqslant |z|+|z'|$$
avec égalité ssi z et z' sont positivement colinéaires.
4. (inégalité triangulaire renversée)
$$\Big||z|-|z'|\Big| \leqslant |z \pm z'| \leqslant |z|+|z'|$$

Démonstration

1. On écrit la suite d'inégalités
$$\mathfrak{Re}(z) \leqslant_{(1)} |\mathfrak{Re}(z)| = \sqrt{\mathfrak{Re}(z)^2} \leqslant_{(2)} \sqrt{\mathfrak{Re}(z)^2+\mathfrak{Im}(z)^2} = |z|.$$
Il y a égalité entre $|\mathfrak{Re}(z)|$ et $|z|$ si et seulement s'il y a égalité dans (2), i.e. ssi $\mathfrak{Im}(z)=0$, i.e. ssi $z \in \mathbb{R}$.
Il y a égalité entre $\mathfrak{Re}(z)$ et $|z|$ si et seulement s'il y a égalité en (1) et en (2), i.e. ssi $z \in \mathbb{R}$ et $\mathfrak{Re}(z) = |\mathfrak{Re}(z)|$, i.e. $z=|z|$, i.e. $z \in \mathbb{R}_+$.
On fait de même pour la partie imaginaire.
2. Déjà, si z ou z' est nul, l'égalité est vraie et si z ou z' est nul, les deux vecteurs sont bien positivement colinéaires.
On suppose désormais que z et z' sont non nuls. On sait que
$$\mathfrak{Re}(z\overline{z'}) \leqslant |z\overline{z'}| = |z||\overline{z'}| = |z||z'|,$$
avec égalité ssi $z\overline{z'} \in \mathbb{R}_+$. Or, on a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} z\overline{z'} \in \mathbb{R}_+ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+,\ z\overline{z'} = \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+,\ z\overline{z'}z' = \lambda z' \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+,\ z|z'|^2 = \lambda z' \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+,\ z = \frac{\lambda}{|z'|^2} z' \\ &\Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R}_+,\ z = \mu z', \end{aligned}$$
d'où la condition recherchée !
3. Comme les quantités manipulées sont positives, on a l'équivalence suivante :
$$\begin{aligned} |z+z'| \leqslant |z|+|z'| &\Leftrightarrow |z+z'|^2 \leqslant (|z|+|z'|)^2 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 + 2\mathfrak{Re}(z\overline{z'}) + |z'|^2 \leqslant |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{Re}(z\overline{z'}) \leqslant |z||z'| \end{aligned}$$
Or la dernière proposition est vraie par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Il y a égalité si et seulement s'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, i.e. ssi z et z' sont positivement colinéaires.
4. Déjà, comme $|-z'| = |z'|$, ceci explique que l'inégalité est vraie, que l'on remplace z' par $-z'$. On démontre donc seulement
$$\Big||z|-|z'|\Big| \leqslant |z+z'| \leqslant |z|+|z'|$$

1. Augustin Louis Cauchy, 1789-1857, mathématicien français.
2. Hermann Amandus Schwarz, 1843-1921, mathématicien allemand.

et, donc, comme l'inégalité triangulaire a été prouvée, on démontre que

$$\Big||z| - |z'|\Big| \leqslant |z + z'|,$$

i.e. que

$$|z| - |z'| \leqslant |z + z'| \text{ et } |z'| - |z| \leqslant |z + z'|.$$

Démontrons la première inégalité :

$$\begin{aligned} |z| &= |z + z' - z'| \\ &\leqslant |z + z'| + |z'| \text{ par inégalité triangulaire} \end{aligned}$$

donc $|z| - |z'| \leqslant |z + z'|$. La seconde inégalité est donc démontrée et le résultat est prouvé !

■

2 Nombres complexes de module ‘– argument

Le but de cette section va être d'adapter la représentation des complexes à la multiplication. En effet, si la loi de somme sur $\mathbb{R}^2$ est tout à fait naturelle, celle du produit est plus compliquée. Par exemple, que vaut

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{42} ?$$

Une manière d'adapter les nombres complexes à la multiplication va être de considérer l'écriture exponentielle des nombres complexes.

2.1 Cercle unité

Définition 10

Le cercle unité, appelé aussi groupe des nombres complexes de module 1, est la partie de $\mathbb{C}$ notée $\mathbb{U}$ et définie par

$$\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}.$$

Remarque 11

$\forall z \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow |z| = 1.$

Proposition 12

L'ensemble $\mathbb{U}$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}^*$,
2. $1 \in \mathbb{U}$,
3. $\forall (z, z') \in \mathbb{U}^2$, $z \times z' \in \mathbb{U}$,
4. $\forall z \in \mathbb{U}$, $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$.

On dit que $\mathbb{U}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Démonstration

1. Déjà, pour tout z de $\mathbb{U}$, $|z| = 1$ donc $z \neq 0$.
2. $|1| = 1$ donc $1 \in \mathbb{U}$.
3. Soit $(z, z') \in \mathbb{U}^2$. Alors $|zz'| = |z||z'| = 1 \times 1 = 1$, donc $zz' \in \mathbb{U}$.
4. Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors
$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{1} = 1,$$
donc $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$.

■

Proposition 13

Pour tout z de $\mathbb{U}$, $\overline{z} = \frac{1}{z}$.

Démonstration

Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors $|z|^2 = 1$, i.e. $z\overline{z} = 1$, i.e. $\overline{z} = \frac{1}{z}$. ■

Exercice 14

Soient a et b deux nombres complexes de module 1. Montrer que $\frac{a+b}{1+ab}$ est un nombre réel.

Définition 15 (et propriété)

Soit $z \in \mathbb{C}$.

1. $z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R},\ z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$
2. si $\theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$
3. $$\forall (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2,\ e^{i\theta} = e^{i\varphi} \Leftrightarrow \theta = \varphi[2\pi],$$
où la dernière égalité signifie
$$\exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \varphi + 2k\pi.$$

Remarque 16

1. Il faut pouvoir représenter graphiquement le cercle trigonométrique.
2. Si $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in [0, 2\pi[$, θ est la longueur de l'arc de cercle entre 1 et z.
3. La notation $e^{i\theta}$ n'est pas anodine, même si pour l'instant on doit distinguer exponentielle réelle et complexe (qui trouveront leur union dans la jolie formule $e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$)

Proposition 17

Soient θ, θ' dans $\mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{Z}$.

1. $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$,
2. $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$,
3. $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$,
4. $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

Proposition 18

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Formules d'Euler :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \mathfrak{Re}(e^{i\theta}) \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2\boxed{i}}.$$

2. Formule de Moivre :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

2.2 Un peu de trigonométrie

Réviser le chapitre 2 !

Exemple 19 (Exemples fondamentaux d'applications – à connaître comme du cours !)

1. (Méthode de l'angle moitié) Pour simplifier des expressions du type $1 \pm e^{i\theta}$, l'idée fondamentale est de **factoriser** par $e^{i\frac{\theta}{2}}$. Ainsi,

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = e^{i\frac{\theta}{2}}.2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Calculons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = S_n$.

L'idée **fondamentale** est de penser au fait que $S_n = \mathfrak{Im}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right)$. Or,

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{i\theta}\right)^k = \begin{cases} n+1 \text{ si } e^{i\theta} = 1 \\ \dfrac{1-(e^{i\theta})^{n+1}}{1-e^{i\theta}} \text{ sinon.} \end{cases}$$

Si $e^{i\theta} = 1$, i.e. $\theta = 0[2\pi]$, alors $S_n = \mathfrak{Im}(n+1) = 0$. Sinon,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \left(e^{i\theta}\right)^k &= \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \\ &= \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}\left(e^{-i\frac{n+1}{2}\theta} - e^{i\frac{n+1}{2}\theta}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)} \\ &= e^{i\frac{n}{2}\theta}\frac{-2i\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= e^{i\frac{n}{2}\theta}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Donc

$$S_n = \mathfrak{Im}\left(e^{i\frac{n}{2}\theta}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

On peut faire de même pour la somme des $\cos(k\theta)$.

3. Linéariser des grosses puissances de sin ou de cos.

Point de méthode 20

L'idée est la suivante :

- on utilise les formules d'Euler,
- on utilise le binôme de Newton,
- on réutilise les formules d'Euler.

Par exemple, si on veut linéariser $\cos^5(\theta)$, on écrit

$$\begin{aligned}\cos^5(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^5 \\ &= \frac{1}{32}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^5 \\ &= \frac{1}{32}\left(1.e^{5i\theta}e^{-0.i\theta} + 5.e^{4i\theta}e^{-i\theta} + 10e^{3i\theta}e^{-2i\theta} + 10e^{2i\theta}e^{-2i\theta} + 5e^{i\theta}e^{-4i\theta} + 1.e^{0.i\theta}e^{-5i\theta}\right) \\ &= \frac{1}{32}\left(e^{5i\theta} + 5e^{3i\theta} + 10e^{i\theta} + 10e^{-i\theta} + 5e^{-3i\theta} + e^{-i\theta}\right) \\ &= \frac{1}{32}\left(2\cos(5\theta) + 5 \times 2\cos(3\theta) + 10 \times 2\cos(\theta)\right) \\ &= \frac{1}{16}\cos(5\theta) + \frac{5}{16}\cos(3\theta) + \frac{5}{8}\cos(\theta).\end{aligned}$$

Attention aux i et aux signes $-$ avec les sinus. Par exemple,

$$\begin{aligned}\sin^3(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right) \\ &= -\frac{1}{8i}\left(e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}\right) \\ &= -\frac{1}{8i}\left(2i\sin(3\theta) - 3 \times 2i\sin(\theta)\right) \\ &= -\frac{1}{4}\sin(3\theta) + \frac{3}{4}\sin(\theta).\end{aligned}$$

4. (propriété importante en physique)

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \exists (A,\varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ a\cos(t) + b\sin(t) = A\cos(t-\varphi).$$

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
Analyse. On suppose qu'il existe A et φ tels que pour tous t dans $\mathbb{R}$,

$$\cos(t) + b\sin(t) = A\cos(t-\varphi) = A\cos(t)\cos(\varphi) + A\sin(t)\sin(\varphi).$$

Pour $t=0$, $a = A\cos(\varphi)$,
Pour $t = \dfrac{\pi}{2}$, $b = A\sin(\varphi)$.
alors

$$a^2 + b^2 = A^2\cos^2(\varphi) + A^2\sin^2(\varphi) = A^2,$$

donc, comme $A \geqslant 0$, $A = \sqrt{a^2+b^2}$.
Donc

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin(\varphi) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

φ est donc unique modulo 2π.
Synthèse à peu près évidente !

2.3 Argument d'un nombre complexe

Définition 21

1. Soit $z \in \mathbb{U}$, $\theta \in \mathbb{R}$.
   Si $z = e^{i\theta}$, on dit que θ est **un** argument de z.
   Si $\theta \in [-\pi, \pi[$, il est unique et on l'appelle argument principal de z, noté $\arg(z)$.
2. Si $z \in \mathbb{C}^*$, un argument de z est un argument de $\dfrac{z}{|z|}$.
   Par convention, 0 n'a pas d'argument.
3. L'écriture géométrique, ou polaire d'un nombre complexe z est l'écriture de z sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$ où $\rho = |z|$ et, si $z \neq 0$, θ est un argument de z.

Proposition 22

1. $\forall (\rho, r) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\forall (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$,

$$\rho e^{i\theta} = r e^{i\varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = r \\ \theta = \varphi [2\pi] \end{cases}$$

2. $\forall (z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$, $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z') \end{cases}$

3. $\forall (z,z') \in (\mathbb{C}^*)^2$,

$$\arg(\overline{z}) = -\arg(z)[2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)[2\pi]$$
$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$$

Exemple 23

1. Déterminer la partie réelle et imaginaire de $(1+i)^{300}$.
Pour ce faire, on écrit que $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, et donc que

$$(1+i)^{300} = \sqrt{2}^{300} \times e^{300i\frac{\pi}{4}} = 2^{150}e^{75.i\pi} = -2^{150}.$$

2. Déterminons un argument de $1-e^{i\theta}$ (avec $\theta \neq 0[2\pi]$). On utilise la technique de l'angle moitié :

$$1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\arg(1-e^{i\theta}) &= \arg(-2i) + \arg\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + \arg(e^{i\frac{\theta}{2}})[2\pi] \\ &= -\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} + \arg\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)[2\pi] \\ &= \begin{cases} \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ si } \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \geqslant 0 \\ \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ si } \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \leqslant 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Remarque $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \geqslant 0$ si et seulement si

$$\frac{\theta}{2} \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k\pi, \pi + 2k\pi]$$

i.e.

$$\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [4k\pi, 2\pi + 4k\pi].$$

2.4 Exponentielle complexe

Définition 24

Soit $z \in \mathbb{C}$. On définit

$$e^z = e^{\mathfrak{Re}(z)}e^{i\mathfrak{Im}(z)}$$

Exemple 25

Ainsi, si $z = (1+i)\dfrac{\pi}{2}$,
$$e^z = e^{\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\pi}{2}} = i e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Proposition 26

Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $n \in \mathbb{N}$.

1. $e^z \neq 0$,
2. $|e^z| = \left|e^{\mathfrak{Re}(z)}\right| . \left|e^{\mathfrak{Im}(z)}\right| = e^{\mathfrak{Re}(z)}$,
3. $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$,
4. $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$,
5. $e^{z-z'} = \dfrac{e^z}{e^{z'}}$,
6. $(e^z)^n = e^{nz}$,
7. $e^z = e^{z'}$ si et seulement si
$$\exists k \in \mathbb{Z},\ z = z' + 2ik\pi.$$

Proposition 27 (Surjectivité de l'exponentielle)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors il existe ω dans $\mathbb{C}$ tel que $z = e^\omega$.
Si $\omega_0 \in \mathbb{C}$ vérifie $z = e^{\omega_0}$, l'ensemble des solutions de l'équation $z = e^\omega$ est $\{\omega_0 + 2ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Démonstration

Comme $z \in \mathbb{C}^*$, on dispose de $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tels que $z = \rho e^{i\theta}$.
Posons $a = \ln(\rho)$, $\omega = a + i\theta$.
Alors $\omega \in \mathbb{C}$ et $e^\omega = e^a e^{i\theta} = \rho e^{i\theta} = z$.
De plus, si ω_0 est une solution et $\alpha \in \mathbb{C}$,
$$z = e^\alpha \Leftrightarrow e^{\omega_0} = e^\alpha \Leftrightarrow e^{\omega_0 - \alpha} = 1 \Leftrightarrow \omega_0 - \alpha = 0[2i\pi],$$
d'où le résultat. ■

3 Résolution d'équations

Le but de cette partie est de résoudre des équations polynomiales ! On ne pourra pas tout résoudre, mais on va donner quelques techniques.

3.1 Généralités sur les polynômes

Définition 28

1. Un **polynôme** P de degré $n \in \mathbb{N}$ est la donnée de $n+1$ coefficients $a_0, \dots, a_n$. Si $z \in \mathbb{C}$, l'évaluation de P en z est $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$.
2. Si $a_n \neq 0$, on dit que le degré de P est n.

3. On dit que deux polynômes P et Q sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux.
4. On note $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$.
5. On note $\mathbb{C}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$ de degré inférieur ou égal à n.

Remarque 29

1. Par convention, le degré du polynôme nul est égal à $-\infty$.
2. On ne démontre pas les propriétés suivantes, mais le degré d'un produit est la somme des degrés, et le degré d'une somme est $\leqslant$ au maximum des degrés.

Définition 30

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $\alpha \in \mathbb{C}$. On dit que α est une racine de P si $P(\alpha) = 0$.

Lemme 31

Soit P un polynôme, $\alpha \in \mathbb{C}$. Il existe un unique polynôme Q dans $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = Q(z)(z-\alpha) + P(\alpha).$$

Démonstration

Première preuve, très courte ! Soit $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$.
Alors $P(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n$. Ainsi,

$$\begin{aligned} P(z) - P(\alpha) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \\ &\quad - a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n \\ &= a_1(z-\alpha) + a_2(z^2-\alpha^2) + a_3(z^3-\alpha^3) + \cdots + a_n(z^n-\alpha^n). \end{aligned}$$

Mais, pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $z^k - \alpha^k$ se factorise par $(z-\alpha)$! (identité de Bernoulli) Ceci permet de dire que $P(z) - P(\alpha) = (z-\alpha) \times ($ une expression polynomiale en $z)$.
On peut s'arrêter là ou bien être plus concret :

$$\begin{aligned} P(z) - P(\alpha) &= \sum_{k=1}^{n} a_k(z^k - \alpha^k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (z-\alpha) a_k \sum_{i=0}^{k-1} z^i \alpha^{k-1-i} \\ &= (z-\alpha) \times Q(z), \end{aligned}$$

où $Q(z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k-1} a_k z^i \alpha^{k-1-i}$.

Deuxième méthode, beaucoup plus longue ! Soient $(a_0, \ldots, a_n)$ tels que $P(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$.

On raisonne par analyse-synthèse.
Analyse. On suppose qu'il existe Q dans $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = Q(z)(z-a) + P(a)$$

On écrit que $Q(z) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k$. Alors, si $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
Q(z)(z-\alpha) + P(\alpha) &= \sum_{k=0}^{n-1} b_k(z^{k+1} - \alpha z^k) + P(\alpha) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha b_k z^k + P(\alpha) \\
&= \sum_{k=1}^{n} b_{\ell-1} z^{\ell} - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha b_k z^k + P(\alpha), \quad \text{en posant } \ell = k+1 \text{ dans la première somme} \\
&= b_{n-1} z^n + \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k-1} - \alpha b_k) z^k - b_0 \alpha + P(\alpha).
\end{aligned}$$

Mais comme $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = Q(z)(z-\alpha) + P(\alpha)$, les coefficients de ces deux polynômes sont égaux, donc

$$\begin{cases}
b_{n-1} = a_n \\
b_{n-2} - \alpha b_{n-1} = a_{n-1} \\
b_{n-3} - \alpha b_{n-2} = a_{n-2} \\
\vdots \\
b_0 - \alpha b_1 = a_1
\end{cases}$$

On a affaire à un système échelonné ! Ainsi,

$$\begin{cases}
b_{n-1} = a_n \\
b_{n-2} = \alpha b_{n-1} + a_{n-1} = \alpha a_n + a_{n-1} \\
b_{n-3} = \alpha b_{n-2} + a_{n-2} = \alpha^2 a_n + \alpha a_{n-1} + a_{n-2} \\
\vdots
\end{cases}$$

Par récurrence, on démontre que pour tout k, $b_{n-k} = \alpha^{k-1} a_n + \alpha^{k-2} a_{n-1} + \cdots + a_{n-k+1}$. Ceci prouve l'unicité de $(b_0, \ldots, b_n)$.
Synthèse. Posons, pour tout k dans $[\![0, n]\!]$, $b_{n-k} = \alpha^{k-1} a_n + \alpha^{k-2} a_{n-1} + \cdots + a_{n-k+1}$, et $Q(z) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k$. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors

$$Q(z)(z-\alpha) + P(\alpha) = b_{n-1} z^n + \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k-1} - \alpha b_k) z^k - b_0 \alpha + P(\alpha).$$

Or, $b_{n-1} = a_n$, et le même calcul de dans l'analyse montre que pour tout k dans $[\![1, n-1]\!]$, $b_{k-1} - \alpha b_k = a_k$. Ensuite,

$$b_0 \alpha = b_{n-n} \alpha = \alpha \times (\alpha^{n-1} a_n + \alpha^{n-2} a_{n-1} + \cdots + a_1) = \sum_{k=1}^{n} a_k \alpha^k = P(\alpha) - a_0.$$

Ainsi, $-b_0 \alpha + P(\alpha) = a_0$ et, pour tout z dans $\mathbb{C}$, $Q(z)(z-\alpha) + P(\alpha) = P(z)$.
Ceci prouve l'existence et le résultat. ■

Proposition 32

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, α une racine de P. Alors il existe Q dans $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que pour tout z dans $\mathbb{C}$, $P(z) = Q(z).(z-a)$.

Démonstration

Évidente ! ■

On admet ensuite le théorème de D'Alembert-Gauss

Théorème 33

Tout polynôme à coefficient dans $\mathbb{C}$ admet une racine.

Ceci permet de factoriser n'importe quel polynôme, puis de factoriser le polynôme Q, etc. D'où le résultat suivant

Proposition 34

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Il existe $A \in \mathbb{C}$, appelé **coefficient dominant**, $r \in \mathbb{N}$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, appelées racines de P, $(m_1, \ldots, m_r)$ appelées multiplicités des racines de P, tels que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = A \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k}.$$

En particulier, on a le résultat suivant

Proposition 35

Soit P un polynôme de degré 2, $P(z) = az^2 + bz + c$, x_1 et x_2 les deux racines de P. Alors $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ et $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.

Proposition 36

Soit P un polynôme, tel que pour tout z dans $\mathbb{C}$, $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = A \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k}$. Alors la somme des racines (comptées avec multiplicité) est égale à $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$ et le produit des racines (comptées avec multiplicité) est égal à $(-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.

3.2 Résolution d'équations du second degré

Proposition 37 (Extraction de racine carrée.)

Soit a un nombre complexe non nul. Alors il existe deux nombres opposés ω et $-\omega$ tels que

$$\omega^2 = (-\omega)^2 = a.$$

Remarque 38

Ne JAMAIS écrire $\omega = \sqrt{a}$! La racine carrée d'un nombre réel positif est uniquement déterminée ($\sqrt{x}$ est l'unique nombre positif tel que $\sqrt{x}^2 = x$) alors qu'une racine d'un nombre complexe quelconque n'est pas uniquement déterminée. En d'autres termes, il n'y a pas moyen de distinguer i et $-i$.

Démonstration

Nous allons donner deux preuves, l'une utilisant l'écriture algébrique, l'autre l'écriture exponentielle.

Première preuve

Écrivons $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Soit $\omega = a + ib$ un complexe. Alors on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\omega^2 = z &\Leftrightarrow (a+ib)^2 = z + iy \\
&\Leftrightarrow a^2 + 2iab - b^2 = x + iy \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = x \\ 2ab = y \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = x \\ 2ab = y \\ |omega^2| = |z| \text{ (cette équation est déjà contenue dans } \omega^2 = z) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = x \\ 2ab = y \\ a^2 + b^2 = |z| \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = x \\ 2ab = y \\ a^2 = \dfrac{x + |z|}{2} = \dfrac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \pm\sqrt{\dfrac{x+|z|}{2}} a^2 - b^2 \quad = x \\ 2ab = y \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm\sqrt{\dfrac{x+|z|}{2}} b^2 \quad = a^2 - x = \dfrac{|z| - x}{2} \\ 2ab = y \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm\sqrt{\dfrac{x+|z|}{2}} b \quad = \pm\sqrt{\dfrac{|z| - x}{2}} \\ 2ab = y \end{cases}
\end{aligned}$$

Ceci donne deux solutions, a est positif ou négatif, et le signe de b est déterminé à l'aide du signe de a et de la condition $2ab = y$. **Deuxième preuve**

Écrivons $a = \rho e^{i\theta}$, et posons $\omega = re^{i\phi}$. L'équation $\omega^2 = a$ s'écrit alors

$$r^2 e^{2i\phi} = \rho e^{i\theta}.$$

On a donc $r^2 = \rho$, i.e. $r = \sqrt{\rho}$, et

$$e^{2i\phi} = e^{i\theta},$$

i.e.
$$2\phi \equiv \theta[2\pi],$$
i.e. $\exists k \in \mathbb{Z}$,
$$2\phi = \theta + 2k\pi,$$
i.e. $\exists k \in \mathbb{Z}$, $\phi = \frac{\theta}{2} + k\pi$, i.e. $\phi \equiv \frac{\theta}{2}[\pi]$, ou encore
$$(\phi \equiv \frac{\theta}{2}[2\pi]) \text{ ou } \phi \equiv \frac{\theta}{2} + \pi[2\pi].$$
D'où deux solutions, $\omega_1 = \sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}$, $\omega_2 = \sqrt{\rho}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)} = -\omega_1$. ■

Remarque 39

Même si la seconde preuve semble beaucoup plus simple que la première, la première méthode est utile lorsque la forme exponentiel le du nombre en question n'est pas évidente.

Exemple 40

Déterminons les racines de $3+4i$.
Soit $\omega = a + ib$ un complexe. Alors
$$\begin{aligned}
\omega^2 = (3+4i)^2 &\Leftrightarrow a^2 + 2iab - b^2 = 3 + 4i \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \\ 2a^2 = 8 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 1 \\ 2ab = 4 \text{ (i.e. } a \text{ et } b \text{ sont de même signe)} \\ 2a^2 = 8 \end{cases} \\
&a = 2 \text{ et } b = 1 \text{ ou } a = -2 \text{ et } b = -1
\end{aligned}$$

Proposition 41 (Résolution des équations du second degré)

Soient a, b et c trois complexes, $a \neq 0$, et (E) l'équation
$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{E}$$
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de (E). Alors

(i) Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une unique solution
$$x_0 = \frac{-b}{2a}.$$

(ii) Si $\Delta \neq 0$, alors l'équation admet deux solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-b-\omega}{2a}, \; x_2 = \frac{-b+\omega}{2a},$$

où ω est une racine de Δ.

Démonstration (Idée fondamentale)

On passe par la forme canonique :

$$\begin{aligned}
az^2 + bz + c &= a\left(a^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(a + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(a + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) \quad \text{si } \delta \text{ est une racine de } \Delta = b^2 - 4ac \\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right) \\
&= a\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right).
\end{aligned}$$

■

Remarque 42

Deux remarques importantes sur le second degré :

1. Si z est solution d'une équation du second degré à coefficients réels, alors $\overline{z}$ est aussi solution de cette équation.
2. Si x_1 et x_2 sont les solutions de $az^2 + bz + c = 0$,

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \\
x_1 x_2 &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.
\end{aligned}$$

3.3 Racines n-ièmes de l'unité

On va s'intéresser dans cette section à des sous-ensembles particuliers et fondamentaux de $\mathbb{U}$, à savoir les racines n-ièmes de l'unité.

Définition 43

Pour tout entier naturel n, on définit le groupe des racines n-ièmes de l'unité, noté $\mathbb{U}_n$, comme l'ensemble

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}, \; z^n = 1\}.$$

Proposition 44

L'ensemble $\mathbb{U}_n$ muni de la loi $\times$ est un sous-groupe de $\mathbb{U}$, c'est-à-dire que

(i) $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$,

(ii) $\forall z, z' \in \mathbb{U}_n,\ zz' \in \mathbb{U}_n$.

(iii) $1 \in \mathbb{U}_n$.

(iv) $\forall z \in \mathbb{U}_n,\ \exists z' \in \mathbb{U}_n,\ zz' = 1$.

Démonstration

1. Soit $z \in \mathbb{U}_n$. Alors $|z^n| = |1| = 1$, i.e. $|z|^n = 1$. Or, $|z| > 0$, donc $|z| = \sqrt[n]{1} = 1$.
2. $1^n = 1$ donc $1 \in \mathbb{U}_n$,
3. Soit $(z, z') \in \mathbb{U}_n^2$. Alors $(zz')^n = z^n(z')^n = 1 \times 1 = 1$.
4. Soit $z \in \mathbb{U}_n$. Alors
$$\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1} = 1.$$

■

Proposition 45

Pour tout entier n,
$$\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$$
et $\mathrm{Card}(\mathbb{U}_n) = n$ (i.e. $\mathbb{U}_n$ possède n éléments).

Démonstration

$\boxed{\subset}$ Soit $z \in \left\{ \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$. On dispose alors de $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $z = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Alors $z^n = ()^n = 1$.
D'où l'inclusion réciproque.

$\boxed{\supset}$ Soit $z \in \mathbb{U}_n$. Alors $z \in \mathbb{U}$, donc on dispose de $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \mathrm{e}^{i\theta}$. Or, $z^n = 1<$ donc $\mathrm{e}^{in\theta} = 1 = \mathrm{e}^{i.0}$.
Donc $n\theta = 0[2\pi]$, donc on dispose de $k \in \mathbb{N}$ tel que $n\theta = 2k\pi$, i.e. $\theta = \dfrac{2k\pi}{n}$.
Effectuons alors la division euclidienne de k par n :
$$k = qn + r,\ \text{avec } q \in \mathbb{Z} \text{ et } r \in [\![0, n-1]\!].$$
Alors
$$z = \mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\frac{2(qn+r)\pi}{n}} = \mathrm{e}^{2iq\pi + 2i\frac{r\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{2ir\pi}{n}},$$
et $r \in [\![0, n-1]\!]$, d'où l'inclusion directe et l'égalité.

Montrons ensuite que $\mathbb{U}_n$ a bien n éléments : il suffit de montrer que si $k \neq \ell$ sont deux éléments de $[\![0, n-1]\!]$, alors $\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \neq \mathrm{e}^{\frac{2i\ell\pi}{n}}$.
On démontre la contraposée : soit $(k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2$ tels que $\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{2i\ell\pi}{n}}$. Alors on dispose de $p \in \mathbb{Z}$ tel que
$$\frac{2ik\pi}{n} = \frac{2i\ell\pi}{n} + 2p\pi,$$
donc
$$k - \ell = pn.$$

Or, $0 \leqslant k \leqslant n-1$ et $-(n-1) \leqslant -\ell \leqslant 0$, donc

$$-(n-1) \leqslant k-\ell \leqslant n-1,$$

donc $|k-\ell| = |p|n$. Si $p \neq 0$, $|p|n \geqslant n$, absurde ! Donc $p = 0$, donc $k = \ell$. D'où la contraposée de la proposition et le caractère distinct des éléments de $\mathbb{U}_n$. ■

Remarque 46

On a aussi $\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in [\![1, n]\!]\}$.

Exemple 47

Décrivons les premiers $\mathbb{U}_n$, pour n de 1 à 5.

1. $\mathbb{U}_1 = \{1\}$
2. $\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$
3. $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ où $j = e^{2ik\pi/3}$. Ces points sont au sommet d'un triangle équilatéral.
4. $\mathbb{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}$: les sommets forment un carré.
5. $\mathbb{U}_5$: les sommets forment un pentagone.

Exercice 48

Déterminer l'écriture algébrique et géométrique des nombres

$$j,\quad j^{-1},\quad \bar{j},\quad 1+j,\quad 1+\bar{j},\quad -1-j,\quad 1+j+j^2,\quad 1+j^2+j^4.$$

Proposition 49

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0.$$

Démonstration

Calculons

$$\begin{aligned}
\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k \\
&= \begin{cases} n \text{ si } e^{\frac{2i\pi}{n}} = 1 \text{ i.e. ssi } n = 1. \\ \dfrac{1-\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}} \text{ sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

■

Exercice 50

Que vaut $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}}$?

3.4 Extraction de puissances

De même que l'on a appris à extraire des racines carrées, nous allons extraire des racines n-ièmes de nombres complexes.

Proposition 51

Soit a un nombre complexe non nul, de module ρ et d'argument principal θ. Alors l'ensemble des solutions de l'équation $\omega^n = a$ d'inconnue $\omega \in \mathbb{C}$ est

$$\{\sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\theta}{n}} \times \alpha,\ \alpha \in \mathbb{U}_n\} = \left\{\sqrt[n]{\rho}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)},\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$$

Démonstration

Déjà, $\omega_0 = \sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\theta}{n}}$ est clairement solution. Ensuite, si $\omega \in \mathbb{C}$, on a l'équivalence

$$\omega^n = z \Leftrightarrow \omega^n = \omega_0^n \Leftrightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \frac{\omega}{\omega_0} \in \mathbb{U}_n \Leftrightarrow \exists\alpha \in \mathbb{U}_n,\ \omega = \omega_0 \times \alpha.$$

■

Exemple 52

Déterminons les racines cubiques de $1+i$.

- déjà, $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
- si $\omega_0 = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}}$, alors $\omega_0^3 = \left(2^{\frac{1}{6}}\right)^3\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Donc l'ensemble des racines cubiques de $1+i$ est

$$\begin{aligned}\{\omega_0\alpha,\ \alpha \in \mathbb{U}_3\} &= \{\omega_0, \omega_0 j, \omega_0 j^2\}\\ &= \left\{2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}},\ 2^{\frac{1}{6}}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)},\ 2^{\frac{1}{6}}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)}\right\}\end{aligned}$$

Exercice 53

Résoudre l'équation $(z-i)^4 = (z+i)^4$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

3.5 Cas général

On ne sait pas, en général, résoudre les équations de degré n. Que connaît-on ?

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

- degré 3 : formules de Cardan
- degré 4 : formules de Lagrange
- degré $\geqslant 5$: il n'existe pas de formule générale ! (prouvé par Galois)

On a en revanche le théorème de D'Alembert-Gauss

Théorème 54

Toute équation polynomiale sur $\mathbb{C}$ admet au moins une solution.

 nlaillet.math@gmail.com

4 Considérations géométriques

Cette partie va nous permettre d'interpréter géométriquement toutes les propriétés déjà vues sur les complexes, et de clore en beauté le chapitre.

4.1 Plan complexe et affixe

Dans toute cette section on effectuera l'identification de $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$. Pour un point du plan $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x, y), on appelle affixe le nombre complexe $x + iy$. On définit de même l'affixe d'un vecteur.

Proposition 55

Soient A, B, C, D des points d'affixes respectives (a, b, c, d).

1. $b - a$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$,
2. $|b - a|$ est la longueur du segment $[AB]$,
3. $\arg(b - a)$ est une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$, où $\vec{u}$ est le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
4. $\arg\left(\dfrac{d-c}{b-a}\right)$ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

4.2 Transformations du plan

Avant de voir le lien entre nombres complexes et transformations, on va expliciter les différentes transformations du plan.

Définition 56

1. Une transformation du plan est une application φ qui à tout point M du plan associe une unique image $M' = \varphi(M)$.
2. Si φ et ψ sont deux transformations du plan, on définit la composée de φ et de ψ, notée $\varphi \circ \psi$ par : pour tout point M du plan,

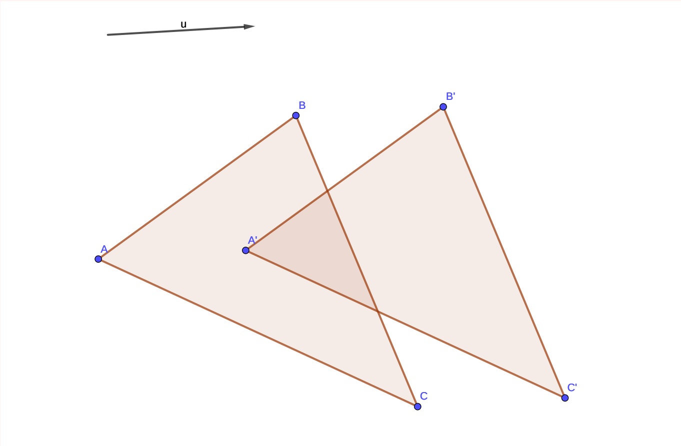
$$\varphi \circ \psi(M) = \varphi(\psi(M)).$$

   En particulier, on remarque que l'on regarde d'abord l'image de M par ψ puis l'image de $\psi(M)$ par φ.
3. On dit que φ et ψ commutent si $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.

Définissons alors certaines transformations et regardons leurs effets.

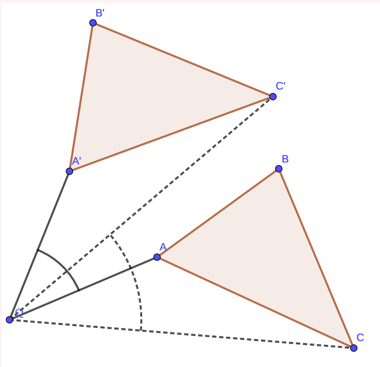
Définition 57

1. Si $\vec{u}$ est un vecteur, la translation de vecteur $\vec{u}$ associe à M le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.



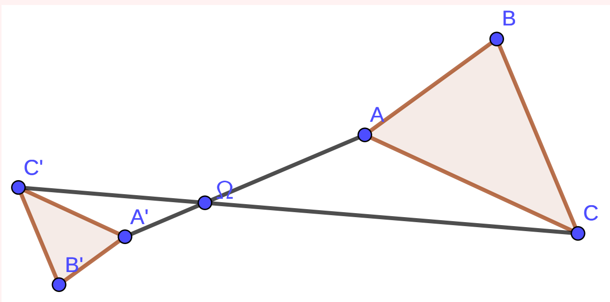
Ici, $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CC'} = \vec{u}$.

2. Soit Ω un point $\theta \in \mathbb{R}$. La rotation de centre Ω, d'angle θ associe à tout point M le point M' tel que $\Omega M = \Omega M'$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$ (l'angle étant orienté).



Ici, l'angle est de $\dfrac{\pi}{4}$.

3. Soit Ω un point, $\lambda \in \mathbb{R}^*$. L'homothétie de centre Ω et de rapport λ est la transformation qui à tout point M associe M' tel que $\overrightarrow{\Omega M} = \lambda \overrightarrow{\Omega M'}$.

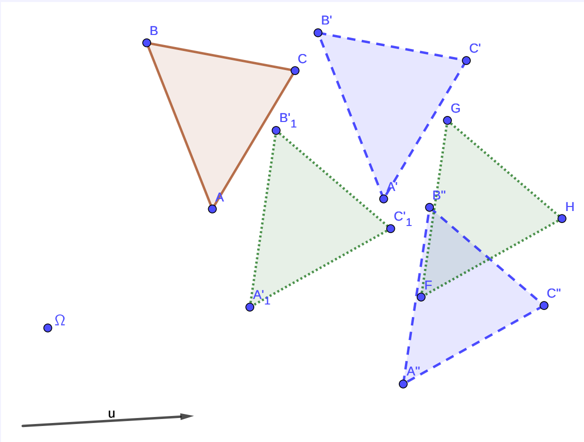


Ici, le rapport est de $-\dfrac{1}{2}$.

Remarque 58

Quand ces transformations commutent-elles ?

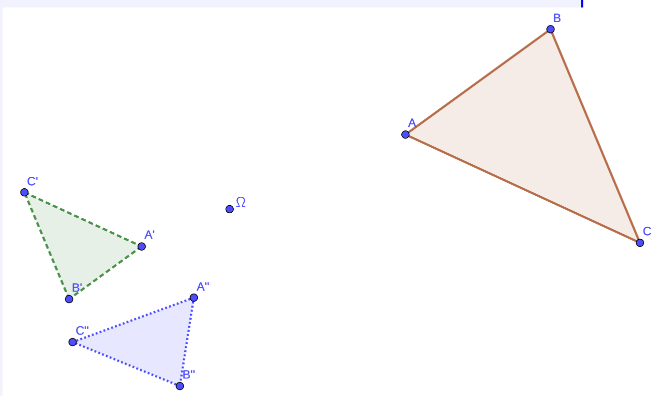
1. Deux translations commutent toujours !
2. Une translation et une rotation ne commutent pas :



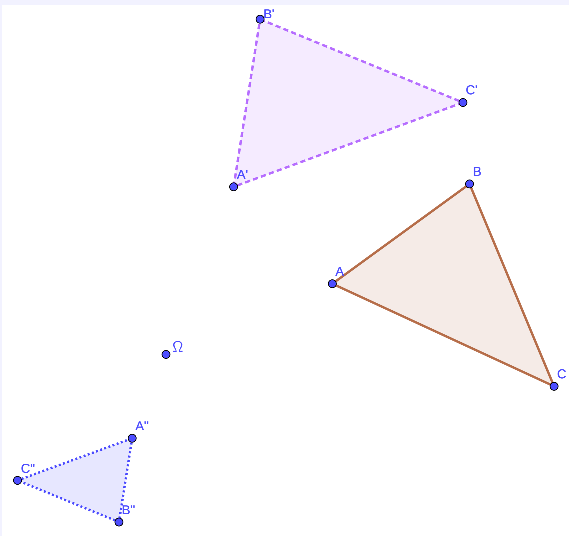
- $A'B'C'$ est l'image de ABC par la translation de vecteur $\vec{u}$, et $A''B''C''$ est l'image de $A'B'C'$ par la rotation de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$,
- $A_1B_1C_1$ est l'image de ABC par la rotation de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ et FGH est l'image de $A_1B_1C_1$ par la translation de vecteur $\vec{u}$.

3. Une rotation/homothétie et une rotation/homothétie **de même centre** commutent : regardons un exemple avec une homothétie de rapport -0.5 et une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

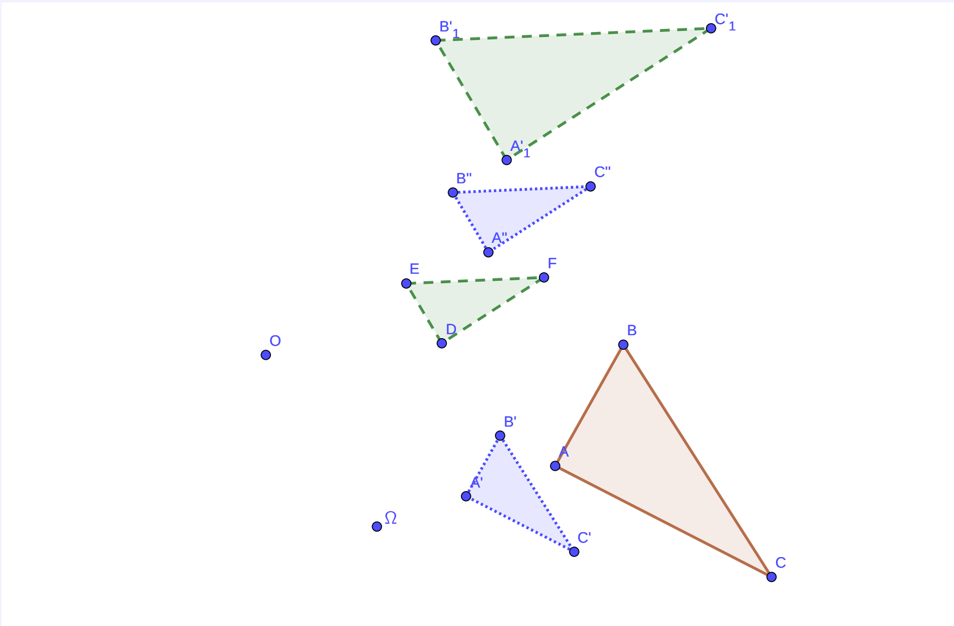
- Homothétie, puis rotation.



- Rotation, puis homothétie.



4. En revanche, une rotation et une homothétie de centres différents ne commutent pas. On prend la rotation de centre



- $A'B'C'$ est l'image de ABC par l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{1}{2}$, et $A''B''C''$ est l'image de $A'B'C'$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$,
- $A'_1B'_1C'_1$ est l'image de ABC par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$, et DEF est l'image de $A'_1B'_1C'_1$ par l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{1}{2}$.

Remarque 59

Toutes ces transformations ainsi que leurs composées préservent :

- les **rapports entre longueurs** (le théorème de Thalès, c'est une homothétie !)
- les angles.

On appelle ces transformations ainsi que leurs composées **similitudes directes.**

4.3 Nombres complexes et transformations

Proposition 60 (Expression complexe des transformations)

1. Si $\vec{u}$ est un vecteur d'affixe $z_{\vec{u}}$, la translation de vecteur $\vec{u}$ associe à tout point M d'affice z le point M' d'affixe $z + z_{\vec{u}}$.
2. Soit Ω d'affixe ω, $\theta \in \mathbb{R}$. La rotation de centre Ω et d'angle θ associe à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe z' vérifiant
$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$
3. Soit Ω d'affixe ω, $\lambda \in \mathbb{R}^*$. L'homothétie de centre Ω et de rapport λ associe à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe z' vérifiant
$$z' - \omega = \lambda(z - \omega).$$

Démonstration

Soit M un point d'affixe z.

1. Évident.
2. Si $M'(z')$ est l'image de M par la rotation d'angle θ de centre Ω,
   - si $z = \omega$, $z' = \omega$,
   - sinon, $\Omega M = \Omega M'$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta[2\pi]$. Donc
   $$\left|\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = 1$$
   et
   $$\arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta[2\pi].$$
   Donc
   $$\frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta},$$
   d'où le résultat !
3. Si $M'(z')$ est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport λ, alors
$$\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M},$$
donc
$$z' - \omega = \lambda(z - \omega),$$
d'où le résultat.

■

Exercice 61

Soit $\Omega(1 + 2i)$. Donner l'expression complexe de $\varphi \circ \psi$ où ψ est la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et φ est l'homothétie de centre Ω et de rapport 4.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Finalement, toutes ces transformations sont des transformations « affines » en z. C'est le but de la propriété suivante :

Proposition 62 (Expressions complexes de similitudes directes)

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, s la transformation qui à tout point M d'affixe z associe M' d'affixe $z' = az + b$, avec $a \neq 0$.

1. si $a = 1$, s est la translation de vecteur u d'affixe b,
2. si $a \neq 1$, on pose $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ et Ω d'affixe ω. s est la composée de la rotation de centre Ω et d'angle $\arg(a)$, et de l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$.

Démonstration

1. si $a = 1$, pour tout $M(z)$, $s(z)$ est d'affixe $z + b$, il s'agit donc de l'affixe de l'image de $M(z)$ par la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b.
2. On cherche si la transformation admet des points fixes. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Alors ω est un point fixe de la transformation ssi $s(\omega) = \omega$, i.e. ssi $a\omega + b = \omega$, i.e. ssi $\omega = \dfrac{b}{1-a}$.
   On pose donc $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ et $\Omega(\omega)$.
   Soit $z \in \mathbb{C}$, $M(z)$, z' l'affixe de l'image de M. Alors
   $$z' = az + b.$$
   Or,
   $$\omega = a\omega + b,$$
   donc
   $$z' - \omega = a(z - \omega).$$
   Si $\rho = |a|$ et $\theta = \arg(a)$, alors
   $$z' - \omega = \rho e^{i\theta}(z - \omega),$$
   donc $M'(z')$ est l'image de M par la composée de la rotation de centre Ω et d'angle $\arg(a)$, et de l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$.

■

Exercice 63

Caractériser la transformation qui à $M(z)$ associe le point d'affixe $z' = (2 - 2i)z + (3 - i)$.

Remarque 64

Les similitudes de la forme $z \mapsto az + b$ sont appelées similitudes directes.
Il existe des similitudes indirectes, comme les symétries axiales, qui s'expriment sous la forme $z \mapsto a\overline{z} + b$. Il faut essentiellement connaître $z \mapsto \overline{z}$ qui est la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.