MPSI1 – Programme de colles
Semaine 03 – du 29 septembre au 3 octobre 2025

Nombres complexes

L'objectif de cette section, que l'on illustrera par de nombreuses figures, est de donner une solide pratique des nombres complexes, à travers les aspects suivants :

— *l'étude algébrique du corps $\mathbb{C}$ et la notion d'équation algébrique ;*

— *l'interprétation géométrique des nombres complexes et l'utilisation des nombres complexes en géométrie plane ;*

— *l'exponentielle complexe et ses applications à la trigonométrie.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Nombres complexes	
Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes. Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^{n} x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme.	La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme.
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »).
b) Conjugaison et module	
Conjugaison, compatibilité avec les opérations. Module. Relation $\lvert z\rvert^2 = z\bar{z}$, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	Image du conjugué dans le plan complexe. Interprétation géométrique de $\lvert z - z'\rvert$, cercles et disques.
c) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie	
Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ pour $t \in \mathbb{R}$.	Notation $\mathbb{U}$.
Exponentielle d'une somme.	
Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}q}$.	Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q), \sin(p) \pm \sin(q)$. Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.
Formule de Moivre.	Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.
d) Forme trigonométrique	
Forme trigonométrique $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(r > 0)$ d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient. Transformation de $a\cos t + b\sin t$ en $A\cos(t - \varphi)$.	
e) Équations algébriques	
Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z - a$.	
Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$. Somme et produit des racines.	Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
f) Racines n-ièmes	
Description des racines n-ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique.	Notation $\mathbb{U}_n$. Représentation géométrique.
g) Exponentielle complexe	
Définition de e^z pour z complexe : $e^z = e^{\text{Re}(z)} e^{i\,\text{Im}(z)}$. Exponentielle d'une somme. Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$. Résolution de l'équation $\exp(z) = a$.	Notations $\exp(z)$, e^z. Module et arguments de e^z.
h) Interprétation géométrique des nombres complexes	
Interprétation géométrique des module et arguments de $\dfrac{c-a}{b-a}$.	Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité.
Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az+b$ pour $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Interprétation géométrique de la conjugaison.	Similitudes directes. Cas particuliers : translations, homothéties, rotations. L'étude générale des similitudes est hors programme.

Programme de cette colle :

- cours sur les complexes (tout !)
- exercices sur les complexes : la géométrie a été faite en fin de semaine, éviter d'en poser trop en début de semaine prochaine.

Exemples de questions de cours

1. Questions autour de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de l'inégalité triangulaire (au choix, certains de ces énoncés) :
   - $\text{Re}(z) \leq |z|$ avec égalité ssi z est réel positif,
   - (Cauchy-Schwarz) $\text{Re}(z\bar{z}') \leq |z||z'|$ avec égalité ssi z et z' sont positivement colinéaires,
   - (Inégalité triangulaire) $|z+z'| \leq |z| + |z'|$ avec égalité ssi z et z' sont positivement colinéaires,
   - (Inégalité triangulaire renversée) $||z| - |z'|| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$ où $\theta \in \mathbb{R}$.
3. Trigonométrie avec les complexes : linéariser $\cos(\theta)^n$ (pour une valeur concrète de n, écrire $\cos(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$, ...
4. Exponentielle complexe : définition, expression de $|e^z|$, et $\forall a \in \mathbb{C}^*, \exists z \in \mathbb{C},\ a = e^z$.
5. Extraction de racines carrées d'un complexe : méthode algébrique (sur un exemple) ou trigonométrique.
6. Description de $\mathbb{U}_n$.
7. Résolution de l'équation $z^n = a$.
8. Somme et produit des racines de l'unité.
9. Description des transformations du type $z \mapsto az+b$.