DM 03
à rendre le lundi 29 septembre

Formules :

- Formule 1 : exercice 2 + Problème, questions 1 à 6.
- Formule 2 : exercices 1 + 2 + Problème, questions 1 à 6
- Formule 3 : exercices 1 + 2 + Problème, questions 1 à 16
- Formule 4 : tout :) (essayer notamment de comprendre ce que l'on a fait dans le problème)

Exercice 1.

1. Soit θ dans $\mathbb{R}$. Déterminer une expression de $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.

Correction

On calcule

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos(\theta + 2\theta)\\ &= \cos(\theta)\cos(2\theta) - \sin(\theta)\sin(2\theta)\\ &= \cos(\theta)(2\cos^2(\theta) - 1) - 2\sin^2(\theta)\cos(\theta)\\ &= \boxed{4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)}.\end{aligned}$$

2. Démontrer que $\cos\frac{\pi}{9}$ est racine d'une équation de degré 3 à coefficients entiers.

Correction

On remarque que

$$\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(3\frac{\pi}{9}\right) = 4\cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{9}\right),$$

donc

$$8\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 - 6\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) = 1,$$

Donc $\cos\frac{\pi}{9}$ est solution d'une équation de degré 3 à coefficients entiers.

3. En déduire que $\cos\frac{\pi}{9}$ est irrationnel.

Correction

Supposons, par l'absurde, que $\cos\dfrac{\pi}{9} = \dfrac{p}{q}$ avec $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $\mathrm{pgcd}(p,q) = 1$. Alors $8\dfrac{p^3}{q^3} - 6\dfrac{p}{q} = 1$, donc, $8p^3 - 6pq^2 = q^3$.

Mais alors, p divise $8p^3 - 6pq^2$, donc p divise $q^3 = q \times q^2$ donc, d'après le théorème de Gauss et comme $\mathrm{pgcd}(p,q) = 1$, p divise q^2, et donc, de la même manière, p divise q. Mais comme p et q sont premiers entre eux, $p = 1$. Ainsi,

$$8 - 6q^2 = q^3,$$

donc $q^3 + 6q^2 = 8$. Donc q divise 8. Mais ni 1, ni 2, ni 4, ni 8 ne sont solution de l'équation, absurde !

Donc $\cos\dfrac{\pi}{9}$ n'est pas rationnel.

Exercice 2. *Paramétrisation de Cayley*. Pour tout réel t, on définit le complexe

$$C(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i\frac{2t}{1+t^2}.$$

1. Démontrer que pour tout t réel, $C(t)$ appartient à $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$, où $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Correction

Soit $t \in \mathbb{R}$.
Alors

$$\begin{aligned}
|C(t)|^2 = \mathfrak{Re}(C(t))^2 + \mathfrak{Im}(C(t))^2 &= \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 \\
&= \frac{(1-t^2)^2 + 4t^2}{(1+t^2)^2} \\
&= \frac{1 - 2t^2 + t^4 + 4t^2}{(1+t^2)^2} \\
&= \frac{1 + 2t^2 + t^4}{(1+t^2)^2} \\
&= \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2} = 1,
\end{aligned}$$

donc $|C(t)| = 1$ donc $C(t) \in \mathbb{U}$. De plus, si on avait $C(t) = -1$, on aurait $1 - t^2 = -(1+t^2)$, i.e. $1 = -1$, impossible !

On définit, pour tout ω de $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$, la quantité

$$H(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1 - \mathfrak{Re}(\omega)}{\mathfrak{Im}(\omega)} & \text{si } \omega \neq 1, \\ 0 & \text{si } \omega = 1 \end{cases}$$

2. Démontrer que pour tout ω dans $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$,

$$H(\omega) = \frac{\mathfrak{Im}(\omega)}{1 + \mathfrak{Re}(\omega)}.$$

Correction

Soit $\omega \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}$. Déjà, si $\omega = 1$, alors $\mathfrak{Im}(\omega) = 0$ donc $H(1) = \dfrac{\mathfrak{Im}(1)}{1+\mathfrak{Re}(1)}$.

Sinon, on dispose de $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\omega = e^{i\theta}$. Alors

$$\begin{aligned} H(\omega) - \frac{\mathfrak{Im}(\omega)}{1+\mathfrak{Re}(\omega)} &= \frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)} - \frac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)} \\ &= \frac{(1-\cos(\theta))(1+\cos(\theta)) - \sin^2(\theta)}{\sin(\theta)(1+\cos(\theta))} = \frac{1-\cos(\theta)^2-\sin(\theta)^2}{\sin(\theta)(1+\cos(\theta))} = 0, \end{aligned}$$

donc $\boxed{H(\omega) = \dfrac{\mathfrak{Im}(\omega)}{1+\mathfrak{Re}(\omega)}}$.

3. Démontrer que

$$\forall \omega \in \mathbb{U} \setminus \{-1\},\ \forall t \in \mathbb{R},\ C(t) = \omega \Leftrightarrow t = H(\omega).$$

On dit que H est la bijection réciproque de C.

Correction

Soit ω dans $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$ et $t \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $C(t) = \omega$, alors $\dfrac{1-t^2}{1+t^2} + i\dfrac{2t}{1+t^2} = \omega$, donc

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \mathfrak{Re}(\omega) \text{ et } \frac{2t}{1+t^2} = \mathfrak{Im}(\omega).$$

Par la première équation, on obtient $1 - t^2 = \mathfrak{Re}(\omega)(1+t^2)$, donc $t^2 = \dfrac{1-\mathfrak{Re}(\omega)}{1+\mathfrak{Re}(\omega)}$, donc

$$1 + t^2 = \frac{2}{1+\mathfrak{Re}(\omega)}.$$

On en déduit donc que

$$\boxed{t = \frac{1}{2}(1+t^2)\mathfrak{Im}(\omega) = \frac{\mathfrak{Im}(\omega)}{1+\mathfrak{Re}(\omega)} = H(\omega)}.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $t = H(\omega)$. Alors

$$C(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i\frac{2t}{1+t^2}.$$

Or, si on écrit $\omega = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, avec $\theta \in \mathbb{R}$, on a $H(\omega) = \dfrac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)}$, et

$$\begin{aligned} 1 + t^2 = 1 + \frac{\sin^2}{(1+\cos(\theta))^2} &= \frac{(1+\cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)}{(1+\cos(\theta))^2} = \frac{1+2\cos(\theta)+\cos(\theta)^2+\sin(\theta)^2}{(1+\cos(\theta))^2} \\ &= \frac{2(1+\cos(\theta))}{(1+\cos(\theta))^2} = \frac{2}{1+\cos(\theta)}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 1 - t^2 = 1 - \frac{\sin^2}{(1+\cos(\theta))^2} &= \frac{(1+\cos(\theta))^2 - \sin^2(\theta)}{(1+\cos(\theta))^2} = \frac{1+2\cos(\theta)+\cos(\theta)^2-\sin(\theta)^2}{(1+\cos(\theta))^2} \\ &= \frac{2\cos(\theta)+2\cos(\theta)^2}{(1+\cos(\theta))^2} = \frac{2\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}, \end{aligned}$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

donc
$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{\frac{2\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}}{\frac{2}{1+\cos(\theta)}} = \boxed{\cos(\theta)},$$
et
$$\frac{2t}{1+t^2} = \frac{\frac{2\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)}}{\frac{2}{1+\cos(\theta)}} = \boxed{\sin(\theta)}.$$

Problème 1. Sommes exponentielles et isopérimétrie

Dans tout ce problème,

- n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3,
- ω est le nombre complexe égal à $\boxed{e^{\frac{2i\pi}{n}}}$

Le but de ce problème est d'étudier certaines propriétés fondamentalement liées à ω, et notamment d'étudier ce que l'on appelle transformée de Fourier discrète associée à un n-uplet de complexes. La finalité de ces études est l'établissement d'inégalités dites « isopérimétriques », inégalités fondamentales en géométrie, qui expliquent pourquoi les polygones réguliers sont les formes les plus naturelles. Les résultats de la partie A. seront utiles pour les parties suivantes, et la partie B. peut être utilisée dans la dernière partie. Dans la plupart des cas, les résultats à utiliser sont donnés.

A. Préliminaires

A-I. Question préliminaire

1. Soit p un entier naturel entre 0 et $n-1$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \begin{cases} 0 \text{ si } p \neq 0 \\ n \text{ si } p = 0. \end{cases}$$

Correction

Si $p = 0$, $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n}$.

Sinon, si $p \neq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ikp\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2ip\pi}{n}}\right)^k = \frac{1-\left(e^{\frac{2ip\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{2ip\pi}{n}}} \text{ car } e^{\frac{2ip\pi}{n}} \neq 1.$$

Donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = 0}$.

A-II. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_0, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Le but de cet exercice est de montrer

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k^2\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k^2\right).$$

On note

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^2,\ B = \sum_{k=0}^{n-1} b_k^2,\ C = \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k.$$

On suppose que $A \neq 0$, c'est-à-dire que $(a_0, \dots, a_{n-1})$ ne sont pas tous nuls.

2. Soit x un réel. Développer $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k x + b_k)^2$ et l'écrire en fonction de A, B et C.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Correction

On développe l'expression

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 x^2 + 2a_k x b_k + b_k^2 \\ &= x^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2x \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = \boxed{Ax^2 + 2Cx + B}. \end{aligned}$$

3. Déduire de l'étude du signe de la fonction f l'inégalité désirée.

Correction

Par définition, la fonction f étant une somme de carrés, elle est positive ou nulle sur tout $\mathbb{R}$. Mais on a vu en question précédente que f était une fonction polynomiale du second degré, donc $\boxed{\text{son discriminant est négatif}}$, i.e.

$$(2C)^2 - 4AB \leqslant 0,$$

i.e. $\boxed{C^2 \leqslant AB}$, d'où le résultat désiré !

4. Démontrer qu'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall k \in [\![0, n-1]\!], \ b_k = \lambda a_k.$$

Correction

Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Leftarrow}$ Déjà, s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \ b_k = \lambda a_k$, alors

$$C = \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k = C = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda a_k = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} a_k^2 = \lambda A,$$

donc $C^2 = \lambda^2 A^2$, et, comme $B = \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda a_k)^2 = \lambda^2 A$, on a bien $AB = \lambda^2 A^2 = C^2$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $C^2 = AB$, alors le discriminant du polynôme f est nul, **donc f s'annule en un réel x_0.** Mais $f(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k + x_0 b_k)^2$. Donc, comme $f(x_0) = 0$, $\sum_{k=0}^{n-1} (a_k + x_0 b_k)^2 = 0$.

Comme pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$, $(a_k + x_0 b_k)^2 \geqslant 0$, alors,

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \ a_k + x_0 b_k = 0,$$

i.e., en posant $\lambda = -x_0$, $\boxed{\text{pour tout } k \text{ dans } [\![0, n-1]\!], \ a_k = \lambda b_k.}$

B. Transformée de Fourier discrète

Soit $U = (u_0, \dots, u_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On définit la transformée de Fourier discrète de U, notée $\mathcal{F}(U)$, par $\mathcal{F}(U) = (v_0, \dots, v_{n-1})$, où

$$\forall \ell \in [\![0, n-1]\!],\ v_\ell = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (\overline{\omega}^\ell)^k u_k.$$

On remarquera en particulier que $v_0 = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

5. Dans le cas où pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$, $u_k = \dbinom{n-1}{k}$, que valent $(v_0, \dots, v_{n-1})$?

Correction

Si pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$, $u_k = \dbinom{n-1}{k}$, alors pour tout ℓ dans $[\![0, n-1]\!]$,

$$v_\ell = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (\overline{\omega}^\ell)^k \binom{n-1}{k} = \boxed{(1 + \overline{\omega}^\ell)^{n-1}.}$$

6. Démontrer, **dans le cas général** (i.e. sans supposer que $u_k = \dbinom{n-1}{k}$), que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ u_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\ell=0}^{n-1} (\omega^k)^\ell v_\ell.$$

On pourra utiliser la question 1.
Cette formule est appelée formule d'inversion de Fourier.

Correction

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\ell=0}^{n-1} (\omega^k)^\ell v_\ell &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\ell=0}^{n-1} (\omega^k)^\ell \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} (\overline{\omega}^\ell)^j u_j \\
&= \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (\omega^k)^\ell (\overline{\omega}^\ell)^j u_j \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} u_j \sum_{\ell=0}^{n-1} (\omega^k)^\ell (\overline{\omega}^\ell)^j \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} u_j \sum_{\ell=0}^{n-1} (\omega^k)^\ell (\omega^{-j})^\ell \text{ car } \omega \in \mathbb{U}, \text{ donc } \overline{\omega} = \omega^{-1} \\
&= \boxed{\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} u_j \sum_{\ell=0}^{n-1} (\omega^{k-j})^\ell.}
\end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} (\omega^{k-j})^\ell = 0,$$

sauf si $j = k$: dans ce cas cette somme vaut n. Donc

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\ell=0}^{n-1} (\omega^k)^\ell v_\ell = \frac{1}{n} n u_k = u_k,$$

d'où le résultat désiré !

C. Inégalités isopérimétriques pour les polygones

Soit $Z = (z_0, z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On dira dans cette partie que Z est un *polygone* à n côtés est un n-uplet. On note $z_n = z_0$.
Les *côtés* du polygone sont les segments reliant les points d'affixe z_i et z_{i+1}.
Enfin, on note $\overline{Z} = (\overline{z_0}, \overline{z_1}, \dots, \overline{z_{n-1}})$ et, si $c \in \mathbb{C}$, $Z + c = (z_0 + c, z_1 + c, \dots, z_{n-1} + c)$.

C-I. Généralités

7. Représenter le polygone $Z_1 = (1, j, j^2)$, le polygone $Z_2 = (1, i, -1, -i)$.

Quelques définitions seront utiles pour la suite :

- Le polygone Z est dit *équilatéral* si tous ses côtés sont de même longueur, i.e.

$$\forall i \in [\![0, n-2]\!],\ |z_{i+2} - z_{i+1}| = |z_{i+1} - z_i|.$$

- Le polygone Z est dit *régulier* s'il existe $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que

$$\left(\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ z_k = a\omega^k + b\right) \text{ ou } \left(\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ z_k = a\overline{\omega}^k + b\right).$$

- On appelle polygone régulier élémentaire à n côtés le polygone noté R_n et défini par

$$R_n = (1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}).$$

Remarque. Lorsqu'on manipulera un polygone régulier, on n'hésitera pas à se placer dans le cas où $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ z_k = a\omega^k + b$, et à dire « de même » dans l'autre cas (si la démonstration est vraiment « de même »).

8. Démontrer que si Z est un polygone régulier, Z est l'image de R_n ou de $\overline{R_n}$ par une transformation géométrique dont on précisera les caractéristiques.

Correction

Si Z est un polygone régulier, soient a et b deux complexes, a non nul, tels que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ z_k = a\omega^k + b$$

(on procède de même si on a $\overline{\omega}$ à la place de ω).
Alors

- si $a = 1$, alors Z est l'image de R_n par la translation de vecteur d'affixe b,
- sinon, en posant $\xi = \dfrac{b}{1-a}$ et Ω d'affixe ξ, Z est l'image de R_n par la composée de la rotation de centre Ω et d'angle $\arg(a)$ et de l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$.

9. Démontrer que si Z est un polygone régulier, alors Z est équilatéral, et dessiner un contre-exemple montrant que la réciproque est fausse.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Correction

Si Z est un polygone régulier, on dispose de a un complexe non nul et de b un complexe tels que

- $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ z_k = a\omega^k + b$
- **ou** $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ z_k = a\overline{\omega}^k + b$

Dans le premier cas, soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Alors

$$|z_{k+1} - z_k| = \left|a\omega^{k+1} + b - (a\omega^k + b)\right| = |a\omega^k(\omega - 1)| = |a|.|\omega|^k|\omega - 1| \boxed{= |a|.|\omega - 1|,}$$

quantité indépendante de k, donc pour tout k dans $[\![0, n-2]\!]$, $|z_{k+1} - z_k| = |z_{k+2} - z_{k+1}|$. $\boxed{\text{Donc } Z \text{ est équilatéral}}$.
On fait de même dans le second cas, on trouve que pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$, $|z_{k+1} - z_k| = |a||\overline{\omega} - 1|$. La réciproque est fausse ! Un losange qui n'est pas carré est équilatéral mais n'est pas un polygone régulier ! (les distances des sommets au centre ne sont pas préservées)

On définit finalement les quantités suivantes liées au polygone Z :

$$\mathcal{P}(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|,\ \mathcal{E}(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|^2 \text{ et } \mathcal{A}(Z) = \frac{1}{2}\mathfrak{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1}\overline{z_k}\right).$$

La quantité $\mathcal{E}(Z)$ est appelée énergie du polygone et la quantité $\mathcal{A}(Z)$ est l'aire du polygone.

10. À quoi correspond, géométriquement, la quantité $\mathcal{P}(Z)$?

Correction

La quantité $\mathcal{P}(Z)$ correspond à la somme des longueurs des côtés de Z, i.e. à son périmètre.

11. Exprimer $\mathcal{A}(\overline{Z})$ en fonction de $\mathcal{A}(Z)$, $\mathcal{E}(\overline{Z})$ en fonction de $\mathcal{E}(Z)$.

Correction

On calcule

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\overline{Z}) &= \frac{1}{2}\mathfrak{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \overline{z_{k+1}}z_k\right)\\ &= \frac{1}{2}\mathfrak{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \overline{z_{k+1}\overline{z_k}}\right) \quad = \frac{1}{2}\mathfrak{Im}\left(\overline{\sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1}\overline{z_k}}\right) = -\frac{1}{2}\mathfrak{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1}\overline{z_k}\right),\end{aligned}$$

car la partie imaginaire d'un conjugué égale l'opposé de la partie imaginaire. Donc $\boxed{\mathcal{A}(\overline{Z}) = -\mathcal{A}(Z).}$

De même

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\overline{Z}) &= \sum_{k=0}^{n-1} |\overline{z_{k+1}} - \overline{z_k}|^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} |\overline{z_{k+1} - z_k}|^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|^2 \text{ car un complexe et son conjugué ont même module.} \\
&= \boxed{\mathcal{E}(Z)}.
\end{aligned}$$

C-II. Le cas des polygones réguliers

Dans cette partie, on considère que Z est un polygone régulier.

12. Calculer $\mathcal{P}(Z)$, $\mathcal{E}(Z)$ et $|\mathcal{A}(Z)|$.

Correction

Calculons ! On suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tels que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ z_k = a\omega^k + b.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(Z) &= \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} |a|.|\omega - 1| \text{ par la question 9.} \\
&= n|a||\omega - 1| \boxed{= 2n|a| \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).}
\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(Z) &= \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} |a|^2.|\omega - 1|^2 \text{ par la question 9.} \\
&= n|a|^2|\omega - 1|^2 \boxed{= 4n|a|^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right).}
\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1}\overline{z_k} &= \sum_{k=0}^{n-1} (a.\omega^{k+1}+b)(\overline{a\omega}^k+\overline{b}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} a.\omega^{k+1}\overline{a\omega}^k + a\omega^{k+1}\overline{b} + b\overline{a\omega}^k + b\overline{b} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} |a|^2.|\omega|^{2k}\omega + a\omega^{k+1}\overline{b} + b\overline{a\omega}^k + |b|^2 \\
&= |a|^2\sum_{k=0}^{n-1}\omega + a\overline{b}\omega\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k + b\overline{a}\sum_{k=0}^{n-1}\overline{\omega}^k + \sum_{k=0}^{n-1}|b|^2 \text{ car } |\omega|=1 \\
&= n|a|^2\omega + 0 + 0 + n|b|^2
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\mathcal{A}(Z) = \frac{1}{2}\mathfrak{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1}\overline{z_k}\right) = \frac{n}{2}|a|^2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).}$$

13. En déduire que

$$\frac{\mathcal{P}(Z)^2}{\mathcal{E}(Z)} = n, \text{ et que } \frac{|\mathcal{A}(Z)|}{\mathcal{E}(Z)} = \frac{1}{4\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Correction

On calcule alors

$$\boxed{\frac{\mathcal{P}(Z)^2}{\mathcal{E}(Z)} = \frac{(2n|a||\omega-1|)^2}{4n|a|^2|\omega-1|^2} = n,}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{|\mathcal{A}(Z)|}{\mathcal{E}(Z)} &= \frac{\frac{n}{2}|a|^2\left|\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right|}{4n|a|\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)^2} \\
&= \frac{\frac{n}{2}|a|^2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{4n|a|\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)^2} \text{ car } \frac{2\pi}{n}\in[0,\pi] \\
&= \frac{\frac{n}{2}|a|^2 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{4n|a|\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)^2} \\
&= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{4\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \\
&\boxed{= \frac{1}{4\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}}.
\end{aligned}$$

C-III. Première inégalité isopérimétrique

Dans cette partie, Z est à nouveau un polygone quelconque.

14. Montrer que $\mathcal{P}(Z)^2 \leqslant n\mathcal{E}(Z)$.

Correction

On remarque que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(Z) &= \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| \times 1 \\
&\leqslant \left(\sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|^2\right) \times \left(\sum_{k=0}^{n-1} 1\right) \\
&\leqslant n \left(\sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|^2\right),
\end{aligned}$$

par $\boxed{\text{l'inégalité de Cauchy-Schwarz.}}$

15. Déterminer qu'il y a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si Z est équilatéral.

Correction

Par le cas d'inégalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il y a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ |z_{k+1} - z_k| = \lambda \times 1,$$

i.e. si et seulement si

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ |z_1 - z_2| = \cdots = |z_{n-1} - z_n| = \lambda,$$

i.e. si et seulement si $\boxed{Z \text{ est équilatéral.}}$

C-IV. Seconde inégalité isopérimétrique

Cette partie, plus délicate en termes de calculs, est à traiter en dernier.
Dans cette partie, Z est toujours un polygone quelconque.
On note $\mathcal{F}(Z) = (y_0, \dots, y_{n-1})$ sa transformée de Fourier.

16. Démontrer que

$$\mathcal{A}(Z) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) |y_k|^2 \text{ et } \mathcal{E}(Z) = 4\sum_{k=0}^{n-1} \sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) |y_k|^2.$$

On aura intérêt à utiliser la formule d'inversion de Fourier, et, lorsqu'on rencontre un produit $z_i z_j$, à écrire un seul des deux termes à l'aide de cette formule.

Correction

On utilise la formule d'inversion de Fourier ! On sait que

$$\mathcal{A}(Z) = \frac{1}{2}\mathfrak{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1}\overline{z_k}\right),$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

...au brouillon...

mais alors, si $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$z_{k+1}\overline{z_k} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\ell=0}^{n-1}(\omega^{k+1})^{\ell}y_{\ell}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{p=0}^{n-1}(\overline{\omega}^{k})^{p}\overline{y_p}\right).$$

Là, on doit se dire que cela va être assez horrible comme calculs à faire. On peut, peut-être, ne développer qu'un seul des complexes, z_{k+1} par exemple, à l'aide de la formule d'inversion de Fourier.

On écrit alors que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1}\overline{z_k} &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1}(\omega^{k+1})^{\ell}y_{\ell}\overline{z_k} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} y_{\ell}\sum_{k=0}^{n-1}(\omega^{k+1})^{\ell}\overline{z_k} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} y_{\ell}\omega^{\ell}\sum_{k=0}^{n-1}(\omega^{k})^{\ell}\overline{z_k} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} y_{\ell}\omega^{\ell}\overline{\sum_{k=0}^{n-1}(\overline{\omega}^{k})^{\ell}z_k} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} y_{\ell}\omega^{\ell}\overline{y_{\ell}} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} |y_{\ell}|^2\omega^{\ell}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{A}(Z) = \mathfrak{Im}\left(\sum_{\ell=0}^{n-1}|y_{\ell}|^2\omega^{\ell}\right) = \frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{n-1}|y_{\ell}|^2\sin\left(\frac{2\ell\pi}{n}\right).$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(Z) &= \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|^2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k)(\overline{z_{k+1}} - \overline{z_k}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (\overline{z_{k+1}} - \overline{z_k}) \left(\sum_{\ell=0}^{n-1} (\omega^{k+1})^\ell y_\ell - \sum_{\ell=0}^{n-1} (\omega^k)^\ell y_\ell \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (\overline{z_{k+1}} - \overline{z_k}) \sum_{\ell=0}^{n-1} \left(\omega^{\ell(k+1)} - \omega^{k\ell} \right) y_\ell \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\ell=0}^{n-1} y_\ell \sum_{k=0}^{n-1} (\overline{z_{k+1}} - \overline{z_k}) \left(\omega^{\ell(k+1)} - \omega^{k\ell} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\ell=0}^{n-1} y_\ell \left(\sum_{k=0}^{n-1} \overline{z_{k+1}} \omega^{\ell(k+1)} - \sum_{k=0}^{n-1} \overline{z_k} \omega^{\ell(k+1)} - \sum_{k=0}^{n-1} \overline{z_{k+1}} \omega^{\ell k} + \sum_{k=0}^{n-1} \overline{z_k} \omega^{\ell k} \right)
\end{aligned}$$

Mais $z_n \omega^{\ell n} = z_0 \omega^0$, donc

- $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \overline{z_{k+1}} \omega^{\ell(k+1)} = \overline{y_\ell}$,
- $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \overline{z_k} \omega^{\ell(k+1)} = \omega^\ell \sum_{k=0}^{n-1} z_k \omega^{\ell k} = \omega^\ell \overline{y_\ell}$,
- $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \overline{z_{k+1}} \omega^{\ell k} = \frac{1}{\omega^\ell} \overline{y_\ell}$,
- $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \overline{z_k} \omega^{\ell k} = \overline{y_\ell}$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \overline{z_{k+1}} \omega^{\ell(k+1)} - \sum_{k=0}^{n-1} \overline{z_k} \omega^{\ell(k+1)} - \sum_{k=0}^{n-1} \overline{z_{k+1}} \omega^{\ell k} + \sum_{k=0}^{n-1} \overline{z_k} \omega^{\ell k} \right) &= (2 - \omega^\ell - \overline{\omega}^\ell) \overline{y_\ell} \\
&= 2 \left((1 - \cos\left(\frac{2\ell\pi}{n} \right) \right) \overline{y_\ell} \\
&= 4 \sin^2 \left(\frac{\ell\pi}{n} \right) \overline{y_\ell}
\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle \mathcal{E}(Z) = \sum_{\ell=0}^{n-1} y_\ell 4 \sin^2 \left(\frac{\ell\pi}{n} \right) \overline{y_\ell} = \boxed{4 \sum_{\ell=0}^{n-1} |y_\ell|^2 \sin^2 \left(\frac{\ell\pi}{n} \right)}$.

17. Démontrer que

$$\mathcal{E}(Z) - 4 \tan\left(\frac{\pi}{n} \right) \mathcal{A}(Z) = 4 \sum_{\ell=2}^{n-1} \sin\left(\frac{\ell\pi}{n} \right) \left(\sin\left(\frac{\ell\pi}{n} \right) - \tan\left(\frac{\pi}{n} \right) \cos\left(\frac{\ell\pi}{n} \right) \right) |y_\ell|^2.$$

Correction

En admettant la question précédente, cette question est finalement assez facile ! On calcule

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(Z) - 4\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\mathcal{A}(Z) &= 4\sum_{\ell=0}^{n-1}|y_\ell|^2\sin^2\left(\frac{\ell\pi}{n}\right) - 4\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{n-1}|y_\ell|^2\sin\left(\frac{2\ell\pi}{n}\right)\\
&= 4\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\sin^2\left(\frac{\ell\pi}{n}\right) - \frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2\ell\pi}{n}\right)\right)|y_\ell|^2\\
&= 4\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\sin^2\left(\frac{\ell\pi}{n}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\ell\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\ell\pi}{n}\right)\right)|y_\ell|^2\\
&= 4\sum_{\ell=0}^{n-1}\sin\left(\frac{\ell\pi}{n}\right)\left(\sin\left(\frac{\ell\pi}{n}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\ell\pi}{n}\right)\right)|y_\ell|^2.
\end{aligned}$$

Mais pour $\ell = 0$, $\sin\left(\frac{\ell\pi}{n}\right) = 0$ et, pour $\ell = 1$, $\sin\left(\frac{\ell\pi}{n}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\ell\pi}{n}\right) = 0$.

$\boxed{\text{Donc la somme commence bien à 2.}}$

18. En déduire que $\dfrac{|\mathcal{A}(Z)|}{\mathcal{E}(Z)} \leqslant \dfrac{1}{4\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$, avec égalité ssi Z est régulier non réduit à un point.

Correction

Là, on remonte ses manches et on y va ! !

On montre déjà que $\dfrac{\mathcal{A}(Z)}{\mathcal{E}(Z)} \leqslant \dfrac{1}{4\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$.

On sait que

$$\mathcal{E}(Z) - 4\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\mathcal{A}(Z) = 4\sum_{\ell=2}^{n-1}\sin\left(\frac{\ell\pi}{n}\right)\left(\sin\left(\frac{\ell\pi}{n}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\ell\pi}{n}\right)\right)|y_\ell|^2.$$

Or, si $\ell \neq \dfrac{n}{2}$,

$$\sin\left(\frac{\ell\pi}{n}\right)\left(\sin\left(\frac{\ell\pi}{n}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\ell\pi}{n}\right)\right) = \sin\left(\frac{\ell\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\ell\pi}{n}\right)\left(\tan\left(\frac{\ell\pi}{n}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right).$$

Donc

- si $2 \leqslant \ell < \dfrac{n}{2}$, alors $\cos\left(\dfrac{\ell\pi}{n}\right) > 0$ et par croissance de tan, $\tan\left(\dfrac{\ell\pi}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right) > 0$,
- si $\ell > \dfrac{n}{2}$, alors $\cos\left(\dfrac{\ell\pi}{n}\right) < 0$ et comme $\dfrac{\ell\pi}{n} \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\tan\left(\dfrac{\ell\pi}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right) < 0$.

Enfin, si $\ell = \dfrac{n}{2}$,

$$\sin\left(\frac{\ell\pi}{n}\right)\left(\sin\left(\frac{\ell\pi}{n}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\ell\pi}{n}\right)\right) = 1 > 0,$$

donc toutes les quantités sommées sont positives, donc $\boxed{\mathcal{E}(Z) - 4\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\mathcal{A}(Z) \geqslant 0}$, donc, par positivité stricte de $\mathcal{E}(Z)$,

$$\boxed{\frac{\mathcal{A}(Z)}{\mathcal{E}(Z)} \leqslant \frac{1}{4\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}}$$

Il y a égalité si et seulement si tous les termes sommés sont nuls soit, étant donné que les termes trigonométriques sont strictement positifs, si et seulement si pour tout $\ell \geqslant 2$, $y_\ell = 0$.
Finalement, pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$, $z_k = y_0 + \omega^k y_1$, ce qui signifie exactement que le polygone est régulier. **On montre ensuite que** $\dfrac{-\mathcal{A}(Z)}{\mathcal{E}(Z)} \leqslant \dfrac{1}{4\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$, en remarquant que l'on a

$$\frac{-\mathcal{A}(Z)}{\mathcal{E}(Z)} = \frac{\mathcal{A}(\overline{Z})}{\mathcal{E}(\overline{Z})},$$

d'où l'inégalité en remplaçant Z par $\overline{Z}$, et égalité ssi pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$, $\overline{z_k} = y_0 + \omega^k y_1$, i.e. $z_k = y_0 + \overline{\omega}^k y_1$, ce qui signifie exactement que le polygone est régulier.
D'où le joli résultat de ce DS !

On admet qu'il existe Z_0 non réduit à un point tel que pour tout $Z \in \mathbb{C}^n$ non réduit à un point, $\dfrac{|\mathcal{A}(Z)|}{\mathcal{P}(Z)^2} \leqslant \dfrac{|\mathcal{A}(Z_0)|}{\mathcal{P}(Z_0)^2}$. On pose $\alpha = \dfrac{|\mathcal{A}(Z_0)|}{\mathcal{P}(Z_0)^2}$.

19. Montrer que Z_0 est équilatéral. *De jolis dessins seront bienvenus.*

20. En déduire la valeur de α et les Z pour lequel ce maximum est atteint.

21. Au fait, pourquoi $\mathcal{A}$ est-elle une aire ? Et pourquoi parle-t-on d'inégalités *isopérimétriques* ?