

Interrogation écrite 05 01/10/2025

Nom, Prénom :

1. Soit $M(1+i)$, $\Omega(2-i)$. Donner l'axe de l'image par M de la composée de la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de l'homothétie de centre Ω et de rapport 2.

Correction

On note z' l'axe de l'image de M par cette transformation. On sait, par le cours, que

$$\begin{aligned} z' - (2-i) &= 2e^{-\frac{i\pi}{2}}(1+i - (2-i)) \\ &= -2i(-1+2i) \\ &= 2i+4. \end{aligned}$$

Ainsi, $z' = i+6$.

2. Résoudre l'équation $e^z = -2$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Correction

Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = a+ib$. Alors on a les équivalences

$$\begin{aligned} e^z = -2 &\Leftrightarrow e^a e^{ib} = 2e^{i\pi} \\ &\Leftrightarrow a = \ln(2) \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}, \quad ib = i\pi + 2ik\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = \ln(2) + i\pi + 2ik\pi. \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\{\ln(2) + i\pi + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Définir « f est périodique ».

Correction

La proposition « f est périodique » équivaut à : $\exists T > 0, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$.
Il était impératif de mettre le T dans la proposition, avec un quantificateur.

4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Définir « f est paire ».

Correction

La proposition « f est paire » équivaut à : $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$.

5. Énoncer proprement le théorème des valeurs intermédiaires.

Correction

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, soit f **continue** de $[a, b]$, soit M entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = M$.

6. Soit $f : E \rightarrow F$. Définir proprement « f est une bijection » .

Correction

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E, f(x) = y.$$

7. Dessiner le graphe de $x \mapsto |\ln |x||$ sur son ensemble de définition maximal.

Correction

On a le graphe

