# MPSI 1

## Mathématiques
## DS 02

### Samedi 4 octobre – 8h-12h

- Durée : 4 heures.
- Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
- Le sujet est composé de questions de cours/petites équations, et de deux problèmes.
- Le sujet est **très long** : il **ne faut pas** essayer de tout faire. Un sujet long vous permet de **choisir** ce qui vous inspire le plus. Repérez les questions indépendantes, les parties indépendantes des autres, etc.
- Les questions estampillées $\boxed{\textsf{COURS}}$ sont des questions de cours au milieu des problèmes. Les questions estampillées $\boxed{\textsf{EXO}}$ ressemblent fortement à un exercice corrigé en classe. Les questions avec une étoile (*) sont des questions plus difficiles, dont le résultat est écrit et que vous pouvez admettre pour avancer.
- Prenez **10-15 minutes** pour lire le sujet en entier et décider de la stratégie que vous adopterez. Relisez votre copie 5-10 minutes avant la fin.
- **Encadrez, soulignez vos résultats** et **numérotez vos pages**. Je dois avoir envie de lire vos copies.
- À tout moment, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour pouvoir continuer : il suffit de le préciser clairement sur la copie.
- Si vous voyez ce qui semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur la copie.
- Essayez de changer de copie, au moins de page, lorsque vous changez d'exercice.
- Laissez de la place dans une marge à gauche pour pouvoir noter plus facilement le devoir.
- Une réponse fausse, si elle ne laisse pas paraître de calculs intermédiaires, compte 0 points ; avec calculs intermédiaires elle peut rapporter quelques points.

♫ Bon courage ! ♫

**Exercice 1.** Toutes les questions sont indépendantes. Cette partie ne doit pas vous prendre plus de 20 minutes.

1. Linéariser $\cos^4(\theta)$.
2. Résoudre l'équation $\sin(2x) + \cos(3x) = 0$.
3. Résoudre l'inéquation $\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) \leqslant 1$.
4. Résoudre l'équation $e^z = -2$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Définir « $f$ est périodique » .

# Problème 1. Une équation du second degré

Dans ce problème, on considère deux **complexes** non nuls $m$ et $p$, et on s'intéresse à l'équation du second degré suivante, d'inconnue $z$ :

$$z^2 - 2mz + p = 0.$$

On note $z_1$ et $z_2$ les deux solutions complexes de cette équation (on a éventuellement $z_1 = z_2$). On remarquera que, comme $p \neq 0$, $z_1$ et $z_2$ ne sont pas nulles.

## A. Questions préliminaires

1. $\boxed{\text{COURS}}$ Soient $p$ et $q$ deux réels. En utilisant $e^{ip} + e^{iq}$, retrouver la formule de factorisation de $\cos(p) + \cos(q)$. *La méthode servira peut-être plus tard...*

**Correction**

On écrit que

$$\cos(p) + \cos(q) = e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{i\frac{q-p}{2}}\right)$$
$$\boxed{= 2e^{i\frac{p+q}{2}}\cos\left(\frac{p-q}{2}\right),}$$

d'où

$$\boxed{\cos(p) + \cos(q) = \mathfrak{Re}\left(\cos(p) + \cos(q)\right) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

2. $\boxed{\text{COURS}}$ Exprimer la quantité $\dfrac{m^2}{p}$ à l'aide de $z_1$ et $z_2$.

**Correction**

On sait que $p = z_1 z_2$ et que $-2m = z_1 + z_2$, donc $m = -\dfrac{z_1 + z_2}{2}$. Ainsi, on en déduit que

$$\boxed{\frac{m^2}{p} = \frac{(z_1 + z_2)^2}{4z_1 z_2}.}$$

Soit $Z$ un nombre complexe vérifiant $Z + \dfrac{1}{Z} \in \mathbb{R}$. On note $\alpha = Z + \dfrac{1}{Z}$.

**3.** En déterminant une équation du second degré vérifiée par $Z$, montrer que si $|\alpha| > 2$, alors $Z$ est un réel et que si $|\alpha| < 2$, alors $Z \in \mathbb{U}$. Que se passe-t-il si $|\alpha| = 2$ ?

**Correction**

On sait que $Z + \frac{1}{Z} = \alpha$ donc $Z^2 - \alpha Z + 1 = 0$. Ainsi, $Z$ est solution d'une équation du second degré à coefficients réels, de discriminant égal à $\alpha^2 - 4$. On a donc deux situations :

- si $\alpha^2 - 4 > 0$, c'est-à-dire que $|\alpha| \geqslant 2$, alors l'équation possède deux solutions réelles, donc $Z$ est réel.
- si $|\alpha| < 2$, donc on sait que
$$\boxed{Z = \frac{\alpha \pm -\sqrt{4-\alpha^2}}{2}.}$$
Mais alors
$$\boxed{|Z| = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{4-\alpha^2}{4} = 1,}$$
donc on a bien $\boxed{Z \in \mathbb{U}}$.
- Si $|\alpha| = 2$, alors $Z = \pm 1$ donc $Z$ est dans $\mathbb{R} \cap \mathbb{U}$.

## B. CNS pour que $|z_1| = |z_2|$

**4.** On suppose que $|z_1| = |z_2|$. Donner l'écriture trigonométrique (i.e. sous la forme $\rho e^{i\theta}$) de $\frac{m^2}{p}$, et vérifier qu'il s'agit d'un réel de $[0, 1]$.

**Correction**

On écrit $z_1 = \rho e^{i\theta}$ et $z_2 = \rho e^{i\varphi}$, où $\rho > 0$, $\theta$ et $\varphi$ sont des réels. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{m^2}{p} &= \frac{(z_1+z_2)^2}{4z_1z_2} \\
&= \frac{\rho^2(e^{i\theta}+e^{i\varphi})^2}{4\rho^2 e^{i(\theta+\varphi)}} \\
&= \frac{1}{4}\frac{\left[e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}\left(e^{i\frac{\theta-\varphi}{2}}+e^{i\frac{\varphi-\theta}{2}}\right)\right]^2}{e^{i(\theta+\varphi)}} \\
&= \frac{1}{4}\frac{e^{i\theta+\varphi}\left(2\cos\left(\frac{\varphi-\theta}{2}\right)\right)^2}{e^{i(\theta+\varphi)}} \\
&\boxed{= \cos\left(\frac{\varphi-\theta}{2}\right)^2 \in ]0,1].}
\end{aligned}$$

On se propose d'établir la réciproque, en supposant que $\frac{m^2}{p}$ est un réel de $]0, 1]$. On note $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

**5.** Montrer que $Z + \frac{1}{Z}$ est une quantité réelle de $[-2, 2]$, puis que $|z_1| = |z_2|$.

**Correction**

On calcule

$$\begin{aligned} Z+\frac{1}{Z} &= \frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1} \\ &= \frac{z_1^2+z_2^2}{z_1z_2} \\ &= \frac{(z_1+z_2)^2-2z_1z_2}{z_1z_2} \\ &= \frac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}-2 \\ &\boxed{= 4\frac{m^2}{p}-2.} \end{aligned}$$

Comme $\frac{m^2}{p}\in ]0,1]$, on en déduit que $4\frac{m^2}{p}-2\in[-2,2]$. Ainsi, par la question préliminaire, $\boxed{Z\in\mathbb{U}}$, ce qui signifie que $\boxed{\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=1}$.

## C. CNS pour que $\arg(z_1)=\arg(z_2)[2\pi]$

*Dans cette partie, on aura intérêt à s'inspirer de la partie précédente.*

**6.** Démontrer que si $\arg(z_1)=\arg(z_2)[2\pi]$, alors $\frac{m^2}{p}$ est un réel supérieur ou égal à 1.

**Correction**

On fait de même que précédemment. On écrit que $z_1=\rho e^{i\theta}$ et $z_2=re^{i\theta}$. Alors

$$\frac{m^2}{p}=\frac{(z_1+z_2)^2}{4z_1z_2}=\frac{(\rho+r)^2e^{2i\theta}}{4\rho re^{2i\theta}}=\frac{1}{4}\frac{(\rho+r)^2}{\rho r}\boxed{=\frac{\left(\frac{\rho+r}{2}\right)^2}{\rho r}\geqslant 1,}$$

par l'inégalité arithmético-géométrique (à redémontrer).

**7.** Établir la réciproque.

**Correction**

On sait que si l'on pose $Z=\frac{z_1}{z_2}$, alors $\alpha=Z+\frac{1}{Z}$ est un réel supérieur ou égal à 2, donc $Z$ est réel. Mais, plus précisément, $Z=\frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4}}{2}$. Comme $\sqrt{\alpha^2-4}\leqslant|\alpha|$, $\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4}\geqslant\alpha-|\alpha|\geqslant 0$, donc $Z$ est un réel positif. Ceci assure que

$$\boxed{z_1=Zz_2,\ \text{donc que } z_1 \text{ et } z_2 \text{ ont même argument.}}$$

# Problème 2. Développement eulérien du sinus

Les résultats de la première partie sont à utiliser dans la suite. Les parties B et C sont indépendantes, à l'exception des deux dernières questions (qui utilisent des résultats de la partie B).

## A. Une limite utile

**1.** COURS Soit $z \in \mathbb{C}$. Définir $e^z$.

**Correction**

Si on écrit $z = x + iy$, où $x$ et $y$ sont réels, on définit $\boxed{e^{iz} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)).}$

**2.** EXO Soit $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^a$.

**Correction**

Comme fait cette semaine en cours, on écrit que

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)}.$$

Or,

$$n\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) = a\frac{\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) - \ln(1)}{\frac{a}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a.$$

Donc, par continuité de exp, $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^a$.

**3.** En utilisant le même type d'argument que précédemment, montrer que pour $a \in \mathbb{R}$, $\left(1 + \frac{a}{n^2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

**Correction**

on écrit que

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)}.$$

Or,

$$n\ln\left(1 + \frac{a}{n^2}\right) = \frac{a}{n}\frac{\ln\left(1 + \frac{a}{n^2}\right) - \ln(1)}{\frac{a}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc, par continuité de exp, $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1$.

Notre but est désormais de montrer que pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\left(1 + i\frac{\theta}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{i\theta},$$

où la convergence s'entend comme convergence des parties réelle et imaginaire.
On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

**4.** Justifier qu'il existe $\rho_n > 0$ et $\alpha_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vérifiant $1 + i\frac{\theta}{n} = \rho_n e^{i\alpha_n}$. Déterminer $\rho_n$ et démontrer que $\tan(\alpha_n) = \frac{\theta}{n}$.

**Correction**

Déjà, $1 + i\frac{\theta}{n}$ est un complexe non nul, donc il admet une écriture trigonométrique : on dispose de $\rho_n > 0$ et $\alpha_n$ vérifiant $1 + i\frac{\theta}{n} = \rho_n e^{i\alpha_n}$. Comme la partie réelle de ce complexe est strictement positif, on peut imposer $\alpha_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
De plus,

- $\boxed{\rho_n = \sqrt{1 + \frac{\theta^2}{n^2}},}$
- $\boxed{\tan(\alpha_n) = \frac{\theta}{n}}$ (quotient des parties réelle et imaginaire).

**5.** COURS Justifier géométriquement que pour tout $x$ dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $x \leqslant \tan(x) \leqslant \frac{x}{\cos(x)}$. En déduire la limite, quand $x$ tend vers 0, de $\frac{\tan(x)}{x}$.

**6.** En déduire que

$$\left(1 + i\frac{\theta}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{i\theta}.$$

**Correction**

On écrit que

$$\left(1 + i\frac{\theta}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{\theta^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{in\alpha_n}.$$

On sait déjà que $\left(1 + \frac{\theta^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Ensuite, on remarque que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (car sa tangente tend vers 0) et que, par conséquent,

$$n\alpha_n = n\frac{\alpha_n}{\tan(\alpha_n)}\tan(\alpha_n) = \frac{\alpha_n}{\tan(\alpha_n)}\theta \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \theta.$$

Ainsi,

$$\boxed{e^{in\alpha_n} = \cos(n\alpha_n) + i\sin(\alpha_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}.}$$

## B. Un premier développement

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On note, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$P_n(z) = \frac{1}{2i}\left(\left(1 + \frac{iz}{2n}\right)^{2n} - \left(1 - \frac{iz}{2n}\right)^{2n}\right).$$

**7.** Résoudre l'équation $P_n(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On vérifiera que l'on a bien $2n-1$ solutions, dont on admet qu'elles sont distinctes.

**Correction**

C'est une des grosses questions de ce sujet. Il y a des points à récupérer ici ! Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
P_n(z) = 0 &\Leftrightarrow \left(1 + \frac{iz}{2n}\right)^{2n} - \left(1 - \frac{iz}{2n}\right)^{2n} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(1 + \frac{iz}{2n}\right)^{2n} = \left(1 - \frac{iz}{2n}\right)^{2n} \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1 + \frac{iz}{2n}}{1 - \frac{iz}{2n}}\right)^{2n} = 1 \text{ car si } 1 - \frac{iz}{2n} = 0, \text{ alors } 1 + \frac{iz}{2n} \neq 0, \text{ donc } P(z) \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1 + \frac{iz}{2n}}{1 - \frac{iz}{2n}} \in \mathbb{U}_{2n} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, 2n-1]\!],\ \frac{1 + \frac{iz}{2n}}{1 - \frac{iz}{2n}} = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{2n}} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, 2n-1]\!],\ 2n + iz = (2n - iz)\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, 2n-1]\!],\ iz(1 + \mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}) = 2n(\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}} - 1)
\end{aligned}$$

Mais, là, on remarque que pour $k = n$, $\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}} = -1$, donc on ne peut pas diviser. Ainsi,

$$\begin{aligned}
P_n(z) = 0 &\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!] \cup [\![n+1, 2n-1]\!], z = \frac{2n}{i} \frac{\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}} - 1}{\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}} + 1} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!] \cup [\![n+1, 2n-1]\!], z = \frac{2n}{i} \frac{2i \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}{2\cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!] \cup [\![n+1, 2n-1]\!], z = 2n \tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right).
\end{aligned}$$

**8.** (*) Démontrer alors que

$$P_n(z) = \left(\frac{-1}{4n^2}\right)^{n-1} z \prod_{k=1}^{n-1} \left(z^2 - 4n^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right) = z \prod_{k=1}^{n-1} \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{z^2}{4n^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}\right).$$

**Correction**

*Je vous ai fait cadeau du caractère distinct parce qu'il y a encore des efforts à faire.* Déjà, le coefficient de $z^n$ $P_n$ est

$$\frac{1}{2i}\left(\frac{i^{2n}}{(2n)^{2n}} + \frac{(-i)^{2n}}{(2n)^{2n}}\right) = \frac{1}{2i} \frac{2.(-1)^n}{4^n n^{2n}} = 0.$$

Donc $P_n$ est de degré inférieur ou égal à $2n-1$. En développant avec le binôme de

Newton, le coefficient devant $z^{2n-1}$ de $P_n$ est

$$\frac{1}{2i}\left(2n\frac{(i)^{2n-1}}{(2n)^{2n-1}}+2n\frac{(i)^{2n-1}}{(2n)^{2n-1}}\right)=\frac{1}{2i}\times\frac{4n(-1)^{n-1}i}{(2n)^{2n-1}}$$

$$\boxed{=\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)^{2n-2}}=\left(\frac{-1}{4n^2}\right)^{n-1}.}$$

Ensuite, on a $2n-1$ racines : les $2n\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ pour $k$ dans $[\![0,2n-1]\!]\setminus\{n\}$. Pour $k=0$, on trouve 0 comme racine. Ensuite, on remarque que si $k\in[\![1,n-1]\!]$, $2n-k\in[\![n+1,2n-1]\!]$ **ET**

$$\boxed{2n\tan\left(\frac{(2n-k)\pi}{2n}\right)=2n\tan\left(\pi-\frac{k\pi}{2n}\right)=-2n\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right).}$$

Ainsi, on peut regrouper chaque racine non nulle avec son opposé, et factoriser $P_n$ sous la forme

$$\begin{aligned}
P_n(z)&=\left(\frac{-1}{4n^2}\right)^{n-1}z\prod_{k=1}^{n-1}\left(z-2n\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)\left(z+2n\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)\\
&\boxed{=\left(\frac{-1}{4n^2}\right)^{n-1}z\prod_{k=1}^{n-1}\left(z^2-4n^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)}\\
&=\left(\frac{-1}{4n^2}\right)^{n-1}z\prod_{k=1}^{n-1}4n^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\left(\frac{z^2}{4n^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}-1\right)\\
&=\left(\frac{-1}{4n^2}\right)^{n-1}z\prod_{k=1}^{n-1}4n^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{z^2}{4n^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}-1\right)\\
&=(-1)^{n-1}z\prod_{k=1}^{n-1}\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{z^2}{4n^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}-1\right)\\
&\boxed{=z\prod_{k=1}^{n-1}\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{z^2}{4n^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}\right).}
\end{aligned}$$

D'où le résultat désiré.

**9.** Démontrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)=1$. *On pourra utiliser un changement d'indice judicieux.*

**Correction**

On écrit que

$$\prod_{k=1}^{n-1}\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)=\frac{\prod_{k=1}^{n-1}\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}{\prod_{k=1}^{n-1}\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}.$$

Dans le produit du numérateur, faisons le changement d'indice $\ell = n - k$. Alors

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n-1} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) &= \prod_{\ell=1}^{n-1} \sin^2\left(\frac{(n-\ell)\pi}{2n}\right)\\ &= \prod_{\ell=1}^{n-1} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\ell\pi}{2n}\right)\\ &\boxed{= \prod_{\ell=1}^{n-1} \cos^2\left(\frac{\ell\pi}{2n}\right).}\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{on peut conclure que } \prod_{k=1}^{n-1} \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = 1.}$

**10.** En déduire que pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$,

$$x \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{x^2}{4n^2 \tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sin(x).$$

**Correction**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors on sait que

$$P_n(x) = x \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{x^2}{4n^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}\right).$$

Mais on sait aussi que

$$P_n(x) = \frac{1}{2i}\left(\left(1 + \frac{ix}{2n}\right)^{2n} - \left(1 - \frac{ix}{2n}\right)^{2n}\right).$$

Par la question 6., on en déduit que

$$\boxed{P_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}) = \sin(x).}$$

Ainsi,

$$\boxed{\sin(x) = \lim_{n\to+\infty} P_n(x) = \lim_{n\to+\infty} x \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{x^2}{4n^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}\right).}$$

## C. Tchebycheff vient à la rescousse

**11.** EXO Soit $m$ un entier naturel. Démontrer que pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$,

$$\sin((2m+1)x) = \sin x U_m(\sin x),$$

où, pour tout $z$ dans $\mathbb{C}$,

$$U_m(z) = \sum_{\ell=0}^{m} (-1)^\ell \binom{2m+1}{2\ell+1} \left(1 - z^2\right)^{m-\ell} z^{2\ell}.$$

**Correction**

**Soit** $x \in \mathbb{R}$**.** Par la formule de Moivre, on sait que

$$\sin((2m+1)x) = \mathrm{Im}\left((\cos(x) + i\sin(x))^{2m+1}\right).$$

Or, par la formule du binôme de Newton, on sait que

$$(\cos(x) + i\sin(x))^{2m+1} = \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} i^k \sin^k(x)\cos(x)^{2m+1-k}.$$

On sépare alors les termes d'indices pairs et impairs de la somme :

$$\begin{aligned}(\cos(x) + i\sin(x))^{2m+1} &= \sum_{\ell=0}^{m} \binom{2m+1}{2\ell} i^{2\ell} \sin^{2\ell}(x)\cos(x)^{2m+1-2\ell} + \sum_{\ell=0}^{m} \binom{2m+1}{2\ell+1} i^{2\ell+1} \sin^{2\ell+1}(x)\cos(x)^{2m+1-2\ell-1}\\
&= \sum_{\ell=0}^{m} \binom{2m+1}{2\ell} (-1)^\ell \sin^{2\ell}(x)\cos(x)^{2m+1-2\ell} + i\sum_{\ell=0}^{m} \binom{2m+1}{2\ell+1} (-1)^\ell \sin^{2\ell+1}(x)\cos(x)^{2m+1-2\ell-1}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sin((2m+1)x) &= \sum_{\ell=0}^{m} \binom{2m+1}{2\ell+1} (-1)^\ell \sin^{2\ell+1}(x)\cos(x)^{2m-2\ell}\\
&= \sum_{\ell=0}^{m} \binom{2m+1}{2\ell+1} (-1)^\ell \sin^{2\ell+1}(x)\cos^2(x)^{m-\ell}\\
&= \sin(x)\sum_{\ell=0}^{m} \binom{2m+1}{2\ell+1} (-1)^\ell \sin^{2\ell}(x)(1-\sin^2(x))^{m-\ell}\\
&\boxed{= \sin(x)U_m(x).}\end{aligned}$$

**12.** Montrer que les nombres $\pm\sin\left(\dfrac{k\pi}{2m+1}\right)$ pour $k \in [\![1, m]\!]$ sont des racines de $U_m$.

**Correction**

Soit $k \in [\![1, m]\!]$. Alors

$$\sin\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) U_m\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right) = \sin\left((2m+1)\frac{k\pi}{2m+1}\right) = \sin(k\pi) = 0,$$

donc, comme $\sin\left(\dfrac{k\pi}{2m+1}\right) \neq 0$, $\sin\left(\dfrac{k\pi}{2m+1}\right)$ est racine de $U_m$. De même pour $-\sin\left(\dfrac{k\pi}{2m+1}\right)$.

**13.** (*) On admet que si deux polynômes $P$ et $Q$ ont même degré $n$, mêmes racines distinctes $x_1, \dots, x_n$ non nulles et même valeur en 0, alors $P = Q$. En examinant la valeur en 0 de $U_m$ et son degré, justifier que, pour tout $z$ dans $\mathbb{C}$,

$$U_m(z) = (2m+1)\prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{z^2}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)}\right)$$

**Correction**

Déjà, on remarque que pour $k \in [\![1, m]\!]$, $\dfrac{k\pi}{2m+1}$ est dans $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, intervalle sur lequel le sinus est strictement croissant, donc toutes les valeurs $\sin\left(\dfrac{k\pi}{2m+1}\right)$ sont distinctes. De même pour les $-\sin\left(\dfrac{k\pi}{2m+1}\right)$, car, cette fois, les angles sont dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$. On a donc trouvé $\boxed{2m \text{ racines de } U_m}$, qui sont aussi racines du polynôme

$$V_m(z) = (2m+1)\prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{z^2}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)}\right).$$

Enfin,

$$\begin{aligned} U_m(0) &= \sum_{\ell=0}^{m}(-1)^\ell\binom{2m+1}{2\ell+1}\left(1-0^2\right)^{m-\ell}0^{2\ell} \\ &= \binom{2m+1}{2\times 0+1} = 2m+1 = V_m(0), \end{aligned}$$

donc, d'après le résultat admis, $\boxed{U_m = V_m}$.

**14.** À l'aide de la factorisation précédente, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin x = (2m+1)\sin\left(\frac{x}{2m+1}\right)\prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2m+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)}\right).$$

**Correction**

Par la question 11., on sait que

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sin\left(\frac{x}{2m+1}\right)U_m\left(\sin\left(\frac{x}{2m+1}\right)\right) \\ &\boxed{= \sin\left(\frac{x}{2m+1}\right)(2m+1)\prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{\sin\left(\frac{x}{2m+1}\right)^2}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)}\right).} \end{aligned}$$

**15.** Démontrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est décroissante sur $]0, \pi[$. En déduit que pour $0 < a \leqslant b < \pi$, on a l'inégalité $0 < \dfrac{\sin(b)}{\sin(a)} \leqslant \dfrac{b}{a}$.

**Correction**

On note $f$ cette fonction. Alors $f$ est dérivable et, pour tout $t$ dans $\mathbb{R}$,

$$f' : t \mapsto \frac{\cos(t)t - \sin(t)}{t^2}.$$

pour $t \geqslant \dfrac{\pi}{2}$, $\cos(t) \leqslant 0$ et $\sin(t) \geqslant 0$ donc $f'(t) \leqslant 0$. Pour $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$,

$$f'(t) = \frac{\cos(t)}{t^2}(t - \tan(t)) \leqslant 0.$$

Donc $f'$ est négative, d'où la décroissance de $f$.

**16.** (*) Démontrer que, pour $x \in [0, \pi[$ et $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\sin x \leqslant x \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \leqslant P_{m+1}(x),$$

où la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de polynômes de la section précédente.

**Correction**

D'après la question 14.,

$$\sin x = (2m+1)\sin\left(\frac{x}{2m+1}\right)\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2m+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)}\right).$$

Mais, par la question 15., on sait que, pour $x \in [0, \pi[$ et $k \geqslant 1$, $\dfrac{x}{2m+1} \leqslant \dfrac{k\pi}{2m+1}$, d'où

$$\frac{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2m+1}\right)^2} \leqslant \left(\frac{\frac{k\pi}{2m+1}}{\frac{x}{2m+1}}\right)^2 = \left(\frac{k\pi}{x}\right)^2,$$

d'où, pour $k \geqslant 1$,

$$\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2m+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)} \geqslant \left(\frac{x}{k\pi}\right)^2,$$

d'où, finalement,

$$\boxed{\sin x \leqslant (2m+1)\frac{x}{2m+1}\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).}$$

Enfin, on sait que, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)^2 \geqslant \frac{k^2\pi^2}{4n^2},$$

d'où

$$\frac{x^2}{4n^2\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)^2} \leqslant \frac{x^2}{4n^2\frac{k^2\pi^2}{4n^2}} = \frac{x^2}{k^2\pi^2}.$$

Finalement,

$$x\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{x^2}{4n^2\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)^2}\right) \geqslant x\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right),$$

ce qui est exactement l'inégalité

$$\boxed{x\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \leqslant P_{m+1}(x).}$$

**17.** Conclure que, pour $x$ dans $]-\pi, \pi[$,

$$x\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \sin(x).$$

**Correction**

Comme on a démontré en partie précédente que $\boxed{P_{m+1}(x) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \sin(x)}$, on en déduit, par théorème d'encadrement, le résultat désiré.

*On a donc démontré le magnifique développement eulérien du sinus :*

$$\sin(x) = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$