

MPSI1 – Programme de colles

Semaine 04 – du 6 au 10 octobre 2025

Nombres complexes

Révisions sur le programme précédent.

Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral

A - Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités sur les fonctions	
Ensemble de définition. Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles. Parité, imparité, périodicité. Somme, produit, composée. Monotonie (large et stricte). Fonctions majorées, minorées, bornées.	Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de f celles de fonctions obtenues par des transformations simples, comme $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$. Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude. Traduction géométrique de ces propriétés. La fonction f est bornée si et seulement si $ f $ est majorée.
b) Dérivation	
Dérivée d'une fonction. Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée. Caractérisation des fonctions constantes, (dé)croissantes, strictement (dé)croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle. Tableau de variations. Étude pratique d'une fonction. Tracé du graphe. Représentation graphique et dérivée d'une fonction réciproque. Fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Dérivées d'ordre supérieur.	Notations $f'(x)$, $\frac{d}{dx}(f(x))$. Ces résultats sont rappelés, avec la définition de la dérivée et l'équation de la tangente ; ils ne sont pas démontrés à ce stade. Exemples simples de calculs de dérivées partielles. Résultats admis à ce stade. Application : recherche d'extremums, démonstration d'inégalités. La formule donnant la dérivée est admise, mais on en donne l'interprétation géométrique.
c) Fonctions usuelles	
Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances. Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$. Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle. Inégalités $\exp(x) \geq 1+x$, $\ln(1+x) \leq x$. Fonctions circulaires réciproques Arcsin, Arccos, Arctan. Fonctions hyperboliques sh, ch, th.	Dérivée, variations, représentation graphique. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_-^*$. Logarithme décimal, logarithme en base 2. Dérivée, variations, représentation graphique. Dérivée, variations, représentation graphique. Les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme. La seule formule exigible est $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.

d) Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle

Dérivée d'une fonction à valeurs complexes.

Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient.

Dérivée de $\exp(\varphi)$ où φ est une fonction dérivable à valeurs complexes.

La dérivée est définie par les parties réelle et imaginaire.

Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles.

Programme de cette colle :

- cours sur le début des fonctions usuelles. Je demande que chaque question de cours s'accompagne d'un dessin de graphe de fonction (translatée/dilatée/symétrisée, etc.).
- exercices de révision sur les complexes et exercices sur le début des fonctions usuelles : généralités, exponentielle, logarithme, puissances, trigonométrie hyperbolique.

Exemples de questions de cours

1. Définition avec le théorème de la bijection de $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.
 2. Définition de $x \mapsto x^a$ où $a > 0$, prolongement en 0.
 3. $\ln(x) \leq x - 1$, $e^x \geq x + 1$.
 4. Croissances comparées.
 5. Tout sur l'une des fonctions hyperboliques.
 6. Définition d'une des fonctions circulaires réciproques avec un théorème de la bijection + propriétés.
-