TD 4
Fonctions usuelles

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. ●○○ Tracer le graphe de la fonction : $x \mapsto x|x-1| + |2-x| - x^2$.

Correction

Nommons f la fonction considérée. Séparons les cas : il faut comparer x à 1 et à 2.

1. Si $x \leqslant 1$, alors $|x-1| = 1-x$ et $|2-x| = 2-x$, donc
$$f(x) = x(1-x) + 2 - x - x^2 = x - x^2 + 2 - x - x^2 = 2(1-x^2).$$
2. Si $1 \leqslant x \leqslant 2$, alors $|x-1| = x-1$ et $|2-x| = 2-x$, donc
$$f(x) = x(x-1) + 2 - x - x^2 = x^2 - x + 2 - x - x^2 = 2(1-x).$$
3. Si $x \geqslant 2$, alors $|x-1| = x-1$ et $|2-x| = x-2$, donc
$$f(x) = x(x-1) + x - 2 - x^2 = -2.$$

D'où le graphe fait en cours.

Exercice 2. ●◐○ Montrer que le point de contact de la tangente à la courbe d'équation $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, issue de O a une ordonnée indépendante de a.

Correction

Considérons la courbe d'équation $y = a^x$, et x_0 un réel. La tangente à cette courbe en x_0 a pour équation
$$y = a^{x_0} + \ln(a)a^{x_0}(x - x_0).$$
On veut trouver x_0 tel que la droite décrite précédemment passe par le point $(0,0)$, c'est-à-dire qu'on a
$$0 = a^{x_0} - \ln(a)a^{x_0}x_0,$$
i.e.
$$0 = a^{x_0}(1 - \ln(a)x_0).$$
Donc $x_0 = \dfrac{1}{\ln(a)}$, défini car $a \neq 1$. L'ordonnée du point de la courbe d'équation $y = a^x$ et d'abscisse x_0 est donc
$$y_0 = a^{x_0} = \mathrm{e}^{x_0 \ln(a)} = \mathrm{e},$$
ordonnée indépendante de a !

Exercice 3. *Autour de x^x.* ●●○ *La question 1 est indépendante des deux autres.*

1. Étudier $x \mapsto x^x$.
2. Montrer que pour tout (x, y) de $]0,1[^2$, on a $x^y \geqslant \dfrac{x}{x+y}$.

Correction

Soient (x, y) dans $]0,1[$. Comme x et y sont strictement positifs,

$$x^y \geqslant \frac{x}{x+y} \Leftrightarrow y\ln(x) \geqslant \ln(x) - \ln(x+y).$$

On étudie alors la fonction $\varphi : x \mapsto \ln(x) - \ln(x+y) - y\ln(x) = (1-y)\ln(x) - \ln(x+y)$. Cette fonction est dérivable et pour tout $x > 0$,

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+y} - \frac{y}{x} = \frac{x+y-x-(x+y)y}{x(x+y)}.$$

On sait alors que pour tout x de $]0,1[$, $y-(x+y)y \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 1-y$. Donc φ est croissante puis décroissante et atteint son maximum en $1-y$, et

$$\varphi(1-y) = (1-y)\ln(1-y) \leqslant 0,$$

car $y \in]0,1[$. Donc φ est négative sur $]0,1[$, d'où l'inégalité désirée !

3. En déduire que pour tout (x, y) de $]0,1[^2$, on a $x^y + y^x \geqslant 1$.

Correction

Cela découle de la question précédente : soient x et y dans $]0,1[^2[$. Alors

$$x^y + y^x \geqslant \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} = 1.$$

Exercice 4. ●●○ On considère la fonction f définie par $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x} \end{array}\right.$

1. Étudier la fonction f, en précisant les limites aux bornes de définition et la valeur des extremums.

Correction

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2},$$

donc f' est positive sur $]0, \mathrm{e}]$ et négative sur $[\mathrm{e}, +\infty[$, donc f est croissante sur $]0, \mathrm{e}]$ et décroissante sur $[\mathrm{e}, +\infty[$. Ensuite, comme $\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$ et $\dfrac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$. De plus, par croissances comparées, $\dfrac{\ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. Tracer l'allure de la courbe de f.

Correction

On obtient une courbe de la forme suivante (on ne la trace qu'entre 1 et 10)

3. (Une jolie applciation arithmétique) Déterminer les entiers naturels non nuls n et p vérifiant $n^p = p^n$.

Correction

Déjà tous les couples (n, p) avec $n = p$ fonctionnent. On cherche alors les couples d'entiers (n, p) avec $n \neq p$ tels que $n^p = p^n$. Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Alors

$$n^p = p^n \Leftrightarrow \mathrm{e}^{p\ln(n)} = \mathrm{e}^{n\ln(p)} \Leftrightarrow p\ln(n) = n\ln(p) \Leftrightarrow \frac{\ln(n)}{n} = \frac{\ln(p)}{p} \Leftrightarrow f(n) = f(p)$$

Donc, comme f est strictement décroissante sur $[\mathrm{e}, +\infty[$, les entiers n et p ne peuvent tous deux appartenir à $[\mathrm{e}, +\infty[$. Donc n ou p appartient à $]0, \mathrm{e}]$. Supposons que c'est n (les rôles de n et p sont symétriques)
Or, il n'y a que deux entiers dans $]0, \mathrm{e}]$, ce sont 1 et 2. Mais si $n = 1$, $n^p = 1$ et $p^n = p$, donc, comme $p \neq 1$, il n'y a pas de solution.
Si $n = 2$, alors p est un entier de $[\mathrm{e}, +\infty[$ solution de $f(p) = \dfrac{\ln(2)}{2}$. Par stricte monotonie de f, p est unique. Or, $\dfrac{\ln(4)}{4} = \dfrac{\ln(2^2)}{4} = \dfrac{\ln(2)}{2} = f(2)$. Donc l'unique solution est $p = 4$.

4. Quel est le plus grand nombre entre e^π et π^e ?

Correction

On sait que $\pi > \mathrm{e}$, donc, par décroissance de f sur $[\mathrm{e}, +\infty[$, $f(\pi) < f(\mathrm{e}$, i.e. $\dfrac{\ln(\pi)}{\pi} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, i.e. $\mathrm{e}\ln(\pi) < \pi$, i.e. $\pi^\mathrm{e} \leqslant \mathrm{e}^\pi$.

5. Tracer sur un même graphe $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto 2^x$.

6. Résoudre l'équation $|\cos(x)|^{|\sin(x)|} = |\sin(x)|^{|\cos(x)|}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. *Quelques calculs sur les fonctions trigonométriques et réciproques.*

1. Calculer $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(a + kb)$ $(n \in \mathbb{N}^*,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2)$.

Correction

On écrit que $T_n = \mathfrak{Im}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{i(a+kb)}\right)$. Or,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{i(a+kb)} &= \mathrm{e}^a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{ikb} \\ &= \mathrm{e}^a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\mathrm{e}^{ib})^k \\ &= \mathrm{e}^a (1 + \mathrm{e}^{ib})^n \\ &= \mathrm{e}^a (\mathrm{e}^{i\frac{b}{2}} (\mathrm{e}^{-i\frac{b}{2}} + \mathrm{e}^{i\frac{b}{2}}))^n \\ &= \mathrm{e}^a \mathrm{e}^{i\frac{(n-1)b}{2}} 2^{n-1} \cos\left(\frac{b}{2}\right)^n\end{aligned}$$

Donc $T_n = \mathrm{e}^a \sin\left(\dfrac{(n-1)b}{2}\right) 2^n \cos\left(\dfrac{b}{2}\right)^n$.

2. Calculer $\cos(\mathrm{Arctan}(x))$ et $\sin(\mathrm{Arctan}(x))$ $(x \in \mathbb{R})$.

Correction

On sait, comme $\text{Arctan}(x) \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$, que

$$\begin{cases} \dfrac{\sin(\text{Arctan}(x))}{\cos(\text{Arctan}(x))} = x, \\ \cos^2(\text{Arctan}(x)) + \sin^2(\text{Arctan}(x)) = 1 \end{cases}$$

La première équation indique que $\sin(\text{Arctan}(x)) = x\cos(\text{Arctan}(x))$, soit, en injectant dans la seconde équation,

$$\cos^2(\text{Arctan}(x)) + (x\cos(\text{Arctan}(x)))^2 = 1,$$

ou encore

$$\cos^2(\text{Arctan}(x)) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Donc, comme $\text{Arctan}(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\cos(\text{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

De même,

$$\sin^2(\text{Arctan}(x)) = \frac{x^2}{1+x^2},$$

et comme $\sin(\text{Arctan}(x))$ est du signe de $\text{Arctan}(x)$, donc de x,

$$\sin(\text{Arctan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Remarque. Comme on sait que $\sin = \tan \times \cos$, on pouvait aussi directement dire que

$$\sin(\text{Arctan}(x)) = \tan(\text{Arctan}(x)) \times \cos(\text{Arctan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Exercice 6. **1.** Soient $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$. Montrer que l'argument principal de $a + ib$ est $\text{Arctan}\frac{b}{a}$. Qu'en est-il si $a < 0$?

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy \notin \mathbb{R}_-$. Montrer que l'argument principal de z est donné par :

$$2\,\text{Arctan}\,\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Exercice 7. ●●○ Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, 2.\text{Arctan}(\text{th}(x)) = \text{Arctan}(\text{sh}(2x))$.

Correction

Tout d'abord, on sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 < \text{th}(x) < 1,$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, -\frac{\pi}{4} < \text{Arctan}(\text{th}(x)) < \frac{\pi}{4},$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, -\frac{\pi}{2} < 2.\text{Arctan}(\text{th}(x)) < \frac{\pi}{2}.$$

Il suffit donc de montrer que les tangentes des deux nombres considérés sont égales pour montrer que ces nombres sont égaux. Par définition, $\tan(\text{Arctan}(\text{sh}(2x))) = \text{sh}(2x)$. Ensuite,

$$\begin{aligned}\tan(2.\text{Arctan}(\text{th}(x))) &= \frac{2\tan(\text{Arctan}(\text{th}(x))}{1-\tan(\text{Arctan}(\text{th}(x))^2} \\ &= \frac{2\text{th}(x)}{1-\text{th}^2(x)} \\ &= \frac{2\frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}}{1-\frac{\text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)}} \\ &= \frac{2\frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}\times\text{ch}^2(x)}{\text{ch}^2(x)-\text{sh}^(x)} \\ &= 2\text{sh}(x)\text{ch}(x) \text{ car } \text{ch}^2(x)-\text{sh}^2(x)=1 \\ &= \text{sh}(2x).\end{aligned}$$

D'où l'égalité souhaitée.

Exercice 8. *Vers la fonction* Argch. ●●○

1. Montrer que $\forall y \in [1, +\infty[$, $\exists! x \in \mathbb{R}_+$, $\text{ch}(x) = y$. On cherchera une expression explicite. On nomme la fonction qui à $y \in \mathbb{R}_+$ associe l'unique x dans $\mathbb{R}_+$ tel que $\text{ch}(x) = y$ « argument cosinus hyperbolique » et on la notera Argch.

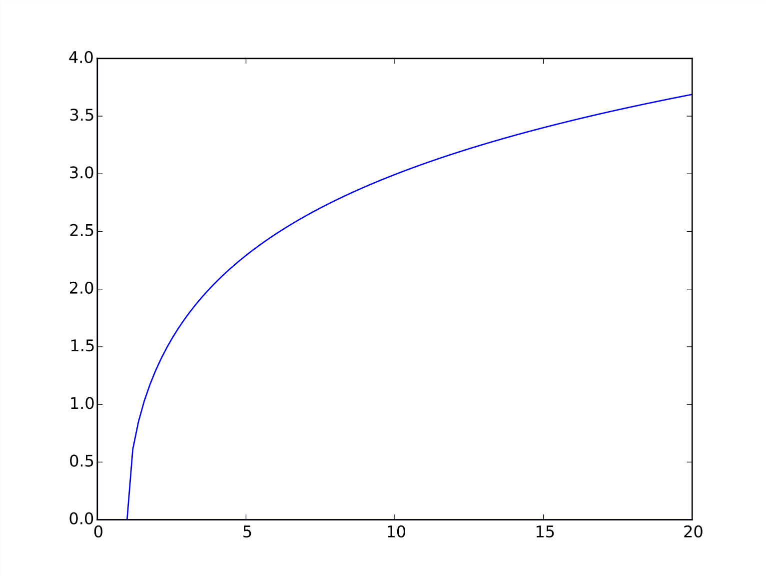
Correction

Soit y un réel supérieur ou égal à 1. Résolvons l'équation $\text{ch}(x) = y$ d'inconnue x.
Analyse. Soit x solution de $\text{ch}(x) = y$. Alors $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = y$, donc $e^x - 2y + e^{-x} = 0$.
On pose $X = e^x$. X est non nul, et même supérieur ou égal à 1.
Alors $X - 2y + \dfrac{1}{X} = 0$, donc $X^2 - 2yX + 1 = 0$. On calcule le discriminant de cette équation, égal à $4y^2 - 4$, positif car $y \geqslant 1$. D'où une ou deux solutions, $X = \dfrac{2y \pm \sqrt{4y^2-4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2-1}$, racines toujours positives strictement.
Si le discriminant est nul, i.e. $y = 1$, l'unique solution est $X = 1 = \ln(y + \sqrt{y^2-1})$.
Sinon, $y - \sqrt{y^2-1} < 1$, donc l'unique solution $\geqslant 1$ est $y + \sqrt{y^2-1}$.
Donc $x = \ln(y + \sqrt{y^2-1})$.
Synthèse. Réciproquement, cette expression est solution.

2. Déterminer les variations de Argch et tracer l'allure de son graphe.

Correction

Si x et y sont deux réels tels que $x < y$. Montrons que $\text{Argch}(x) < \text{Argch}(y)$. Si on avait $\text{Argch}(x) \geqslant \text{Argch}(y)$, on aurait, par croissance de ch, $\text{ch}(\text{Argch}(x)) \geqslant \text{ch}(\text{Argch}(y))$, soit $x \geqslant y$, ce qui est impossible. Donc $\text{Argch}(x) < \text{Argch}(y)$, ce qui signifie que la fonction Argch est strictement croissante. On a le graphe :



3. Dériver Argch.

Correction

On sait que pour tout x dans $[1, +\infty[$, $\mathrm{ch}(\mathrm{Argch}(x)) = x$. Donc, en dérivant l'égalité par rapport à x, on obtient

$$\mathrm{sh}(\mathrm{Argch}(x)) \times f'(x) = 1,$$

où $f : x \mapsto \mathrm{Argch}(x)$. Donc

$$f'(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}(\mathrm{Argch}(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

4. Simplifier les expressions suivantes, en fonction de la valeur du réel x

(a) $\mathrm{ch}(\mathrm{Argch}(x))$

Correction

L'expression $\mathrm{ch}(\mathrm{Argch}(x))$ n'a de sens que pour un réel x dans $[1, +\infty[$. Si $x \in [1, +\infty[$, alors par définition de Argch, $\mathrm{ch}(\mathrm{Argch}(x)) = x$.

(b) $\mathrm{Argch}(\mathrm{ch}(x))$

Correction

Si $x \in \mathbb{R}_+$, alors par définition de Argch, $\mathrm{Argch}(\mathrm{ch}(x)) = x$. Si $x \in \mathbb{R}_-$, alors $-x \in \mathbb{R}_+$, et $\mathrm{ch}(x) = \mathrm{ch}(-x)$. Donc $\mathrm{Argch}(\mathrm{ch}(x)) = \mathrm{Argch}(\mathrm{ch}(-x)) = -x$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Argch}(\mathrm{ch}(x)) = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0, \\ -x \text{ si } x \leqslant 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire que pour tout réel x, $\mathrm{Argch}(\mathrm{ch}(x)) = |x|$.

(c) $\text{sh}(\text{Argch}(x))$

Correction

L'expression $\text{sh}(\text{Argch}(x))$ est définie pour tout x dans $[1, +\infty[$. De plus, $\text{Argch}(x) \geqslant 0$ donc $\text{sh}(\text{Argch}(x)) \geqslant 0$. Or,

$$\forall y \in \mathbb{R}, \text{sh}^2(y) = \text{ch}^2(y) - 1,$$

donc

$$\forall y \geqslant 0, \text{sh}(y) = \sqrt{\text{ch}^2(y) - 1}.$$

En particulier, ici,

$$\forall x \in [1, +\infty[, \ \text{sh}(\text{Argch}(x)) = \sqrt{\text{ch}^2(\text{Argch}(x)) - 1} = \sqrt{x^2 - 1}.$$

2 Étude de fonctions, graphes

Exercice 9. ◐○○ Tracer l'allure du graphe des fonctions suivantes

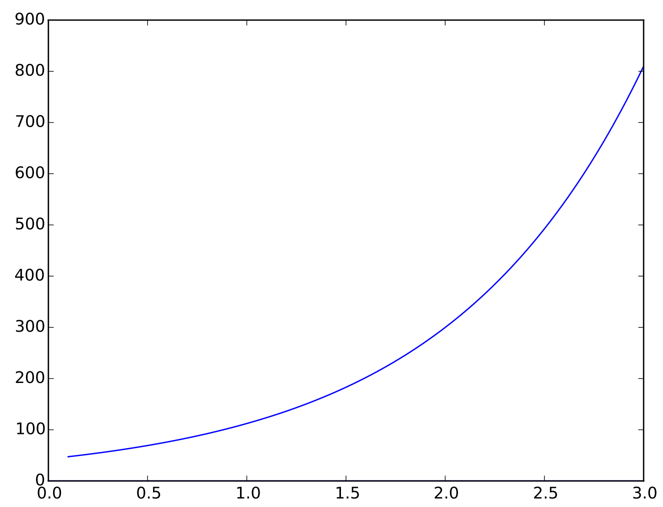
Correction

Dans cet exercice, les traits verticaux des graphes sont liés à des problèmes python.

1. $f : x \mapsto 2e^{x+3} + 3$.

Correction

On obtient :

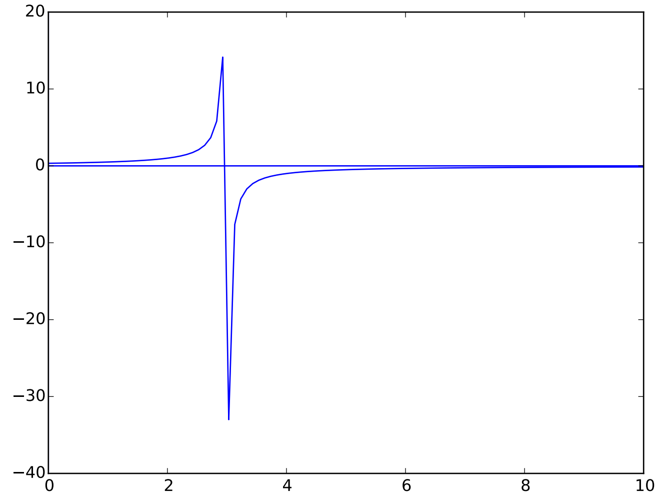


2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{3 - x}$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Correction

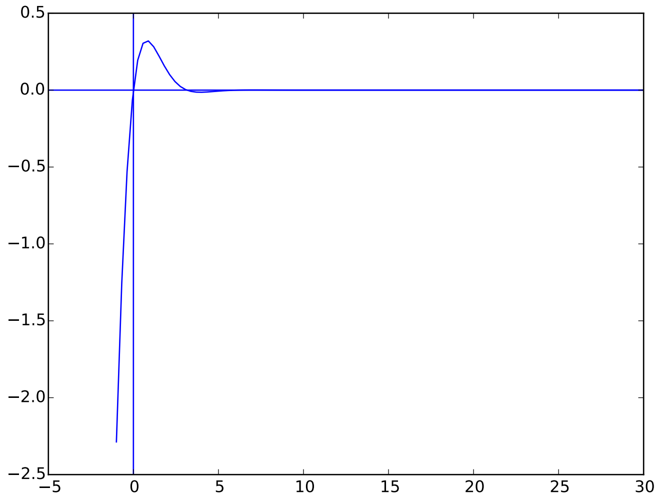
On obtient :



3. $f : x \mapsto e^{-x}\sin(x)$.

Correction

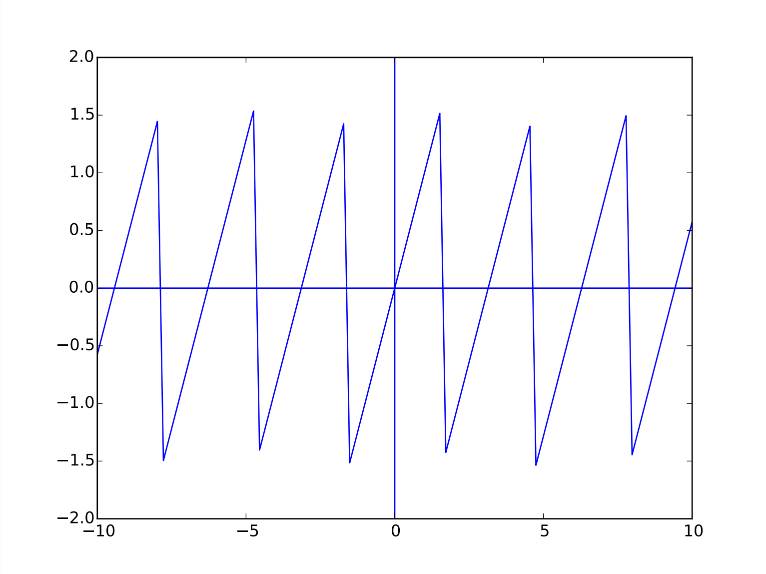
On obtient :



4. $f : x \mapsto \mathrm{Arctan}(\tan(x))$.

Correction

On obtient :



Exercice 10. ◐○○ Étudier les fonctions suivantes

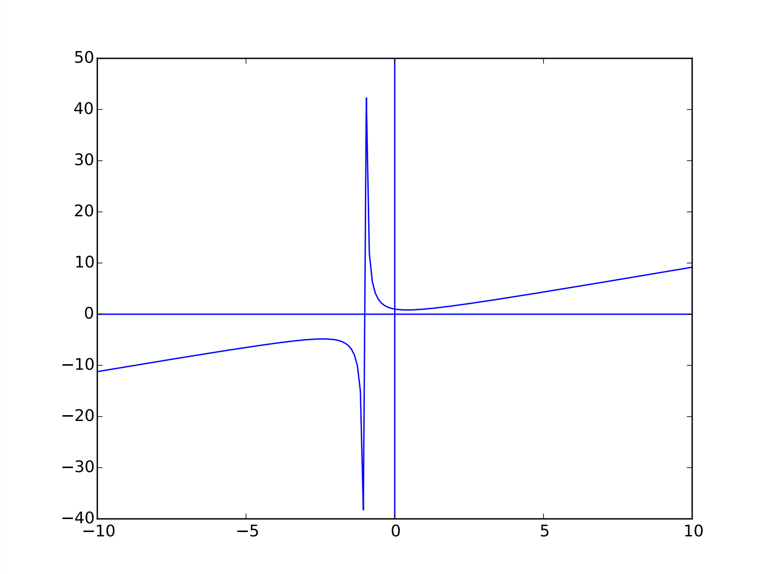
1. $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x+1}$.

Correction

La première fonction, nommons-là f, est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, de dérivée

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x+1)-(x^2+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2+2x+1-2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(x+1)^2-2}{(x+1)^2} \\ &= 1-\frac{2}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Ensuite on étudie le signe de $f'(x)$ en utilisant le fait que f' est positive. sur $]-\infty,-1[$ et croissante sur $]-1,\infty[$. De plus, les limites en $\pm\infty$ sont $\pm\infty$, d'où le graphe



2. $x \mapsto \sqrt{\dfrac{|\ln(x)|}{x}}$.

Correction

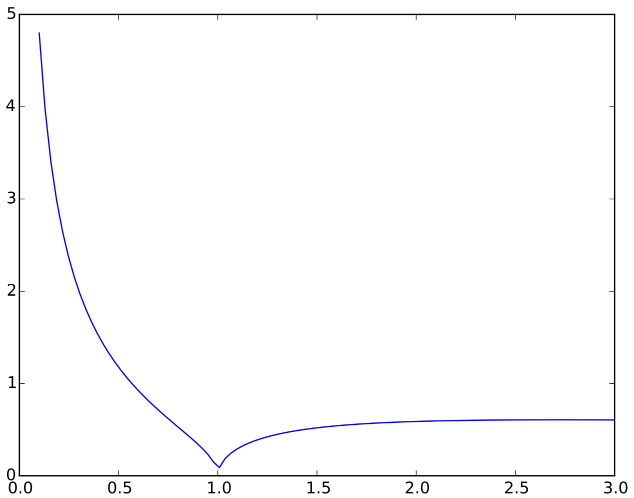
La seconde fonction, notée g, est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{-\ln(x)}{x}} \text{ si } x < 1, \\ \sqrt{\dfrac{\ln(x)}{x}} \text{ si } x \geqslant 1, \end{cases}$$

et est dérivable en tout réel x tel que $\dfrac{|\ln(x)|}{x} \neq 0$, i.e. tel que $x \neq 1$, de dérivée :

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{\frac{-1+\ln(x)}{x^2}}{2\sqrt{\frac{-\ln(x)}{x}}} = \dfrac{(\ln(x)-1)\sqrt{x}}{x^2\sqrt{-\ln(x)}} \text{ si } x < 1, \\ \dfrac{(1-\ln(x))\sqrt{x}}{x^2\sqrt{\ln(x)}} \text{ si } x > 1. \end{cases}$$

D'où le graphe :



Exercice 11. ●●○ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(\text{ch}(x))$.

1. Justifier que f est bien définie.

Correction

On sait que pour tout réel x, $\text{ch}(x) > 1$, donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. Étudier le signe et les variations de cette fonction, et tracer sa courbe représentative.

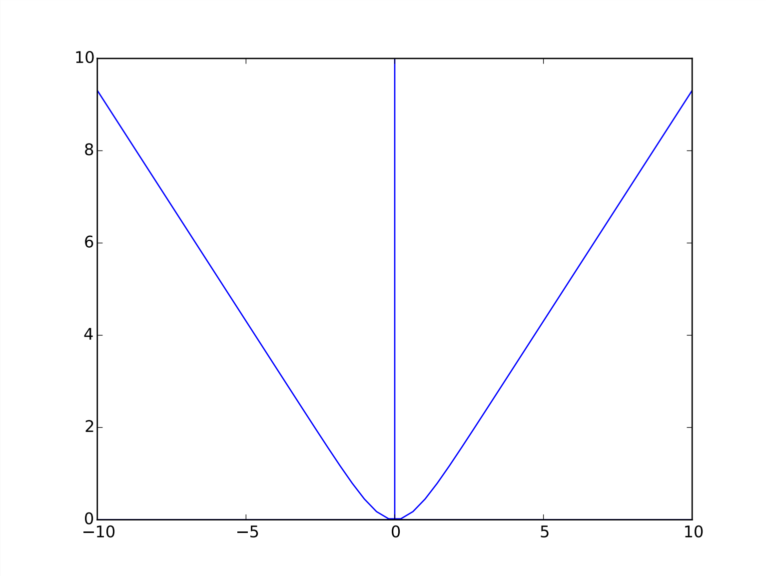
Correction

Dérivons f : pour tout x réel,

$$f'(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = \text{th}(x).$$

Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle est toujours positive car $\text{ch}(x) > 1$ pour tout x réel. D'où la courbe

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com



3. Soit x_0 un réel. Écrire l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0. On nomme $b(x_0)$ son ordonnée à l'origine.

Correction

Au point d'abscisse x_0, l'équation de la tangente est

$$y = f(x_0) + \mathrm{th}(x_0)(x - x_0) = \mathrm{th}(x_0)x + f(x_0) - \mathrm{th}(x_0)x_0.$$

Donc pour tout x réel,

$$b(x) = f(x) - \mathrm{th}(x)x.$$

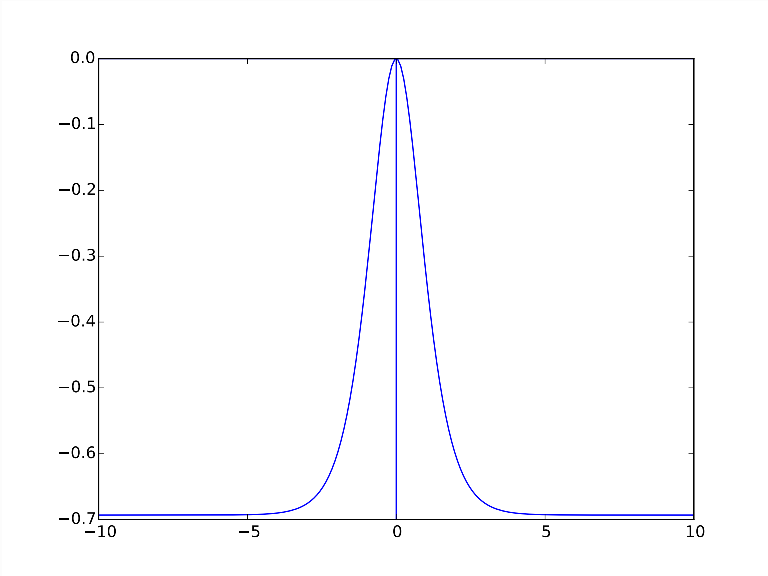
4. Étudier la fonction b, et tracer sa courbe représentative.

Correction

Dérivons b (dérivable sur $\mathbb{R}$ par les théorèmes généraux) et pout tout x réel,

$$b'(x) = \mathrm{th}(x) - (1 - \mathrm{th}^2(x))x - \mathrm{th}(x) = (\mathrm{th}^2(x) - 1)x,$$

quantité du même signe que $-x$ car th^2 est toujours $\leqslant 1$. D'où le graphe



Exercice 12. ●●● Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que le graphe de f admette deux centres de symétrie. Montrer qu'il existe g affine, h périodique, telles que $f = g + h$.

3 Aspects calculatoires et analytiques

Exercice 13. ◐○○ Soit $a > 0$ différent de 1, x un réel. Calculer $y = \log_a \left[\log_a \left(a^{(a^x)}\right)\right]$.

Correction

Il est **fondamental** de remarquer que $x \mapsto a^x$ et $x \mapsto \log_a(x)$ sont deux bijections réciproques. On rappelle que $\log_a(a^b) = b$ pour tout réel b, donc

$$\log_a \left(a^{(a^x)}\right) = a^x.$$

Donc

$$\log_a \left[\log_a \left(a^{(a^x)}\right)\right] = \log_a[a^x] = x.$$

Exercice 14. *Formules de linéarisation et de duplication.* ◐○○

1. Linéariser les expressions suivantes :

(a) $\cos^3(x).\sin^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Correction

Pour la première expression, écrivons $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, donc

$$\cos^3(x).\sin^2(x) = \cos^3(x) - \cos^5(x).$$

Or,

$$\begin{aligned}\cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3\\ &= \frac{1}{8}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^3\\ &= \frac{1}{8}(e^{3ix}+3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}+e^{-3ix})\\ &= \frac{1}{8}(e^{3ix}+e^{-3ix}+3(e^{ix}+e^{-ix}))\\ &= \frac{1}{4}(\cos(3x)+3\cos(x)).\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\cos^5(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^5\\ &= \frac{1}{32}\left(e^{5ix}+5e^{3ix}+10e^{ix}+10e^{-ix}+5e^{-3ix}+e^{-5ix}\right)\\ &= \frac{1}{16}\left(\cos(5x)+\cos(3x)+\cos(x)\right).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\cos^3(x).\sin^2(x) &= \frac{1}{4}(\cos(3x)+3\cos(x)) - \frac{1}{16}\left(\cos(5x)+5\cos(3x)+10\cos(x)\right)\\ &= \frac{1}{16}\left(2\cos(x)-\cos(3x)-\cos(5x)\right).\end{aligned}$$

(b) $\sin^8(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Correction

De même,

$$\begin{aligned}\sin^8(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)\\ &= \frac{1}{256}(e^{ix}-e^{-ix})^8\\ &= \frac{1}{256}\left(1e^{8ix}-8e^{6ix}+28e^{4ix}-56e^{2ix}+70-56e^{-2ix}+28e^{-4ix}-8e^{-6ix}+1e^{-8ix}\right)\\ &= \frac{1}{128}\left(\cos(8x)-8\cos(6x)+28\cos(4x)-56\cos(8x)+70\right).\end{aligned}$$

2. Linéariser les expressions suivantes :

(a) $\operatorname{ch}^2(x)\operatorname{sh}^3(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Correction

Pour calculer $\operatorname{ch}^2(x)\operatorname{sh}^3(x)$, écrivons

$$\operatorname{ch}^2(x)\operatorname{sh}^3(x) = (1+\operatorname{sh}^2(x))\operatorname{sh}^3(x) = \operatorname{sh}^3(x)+\operatorname{sh}^5(x).$$

Or,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}^3(x) &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}\left(e^x - e^{-x}\right)^3 \qquad\qquad = \frac{1}{8}\left(e^{3x} - 3e^x + 3e^{-x} - e^{-3x}\right) \\
&= \frac{\operatorname{sh}(3x) - 3\operatorname{sh}(x)}{4}.
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}^5(x) &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^5 \\
&= \frac{1}{32}\left(e^x - e^{-x}\right)^5 \\
&= \frac{1}{32}(e^{5x} - 5e^{3x} + 10e^x - 10e^{-x} + 5e^{-3x} - e^{-5x}) \\
&= \frac{\operatorname{sh}(5x) - 5\operatorname{sh}(3x) + 10\operatorname{sh}(x)}{16},
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}^2(x)\operatorname{sh}^3(x) &= \operatorname{sh}^3(x) + \operatorname{sh}^5(x) \\
&= \frac{\operatorname{sh}(3x) - 3\operatorname{sh}(x)}{8} + \frac{\operatorname{sh}(5x) - 5\operatorname{sh}(3x) + 10\operatorname{sh}(x)}{32} \\
&= \frac{\operatorname{sh}(5x) - \operatorname{sh}(3x) - 2\operatorname{sh}(x)}{16}.
\end{aligned}$$

(b) $\operatorname{ch}^8(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Correction

De même,

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}^8(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^8 \\
&= \frac{1}{256}\left(e^x + e^{-x}\right)^8 \\
&= \frac{1}{256}\left(1e^{8x} + 8e^{6x} + 28e^{4x} + 56e^{2x} + 70 + 56e^{-2x} + 28e^{-4x} + 8e^{-6x} + 1e^{-8x}\right) \\
&= \frac{\operatorname{ch}(8x) + 8\operatorname{ch}(6x) + 28\operatorname{ch}(4x) + 56\operatorname{ch}(2x) + 70}{128}.
\end{aligned}$$

3. Proposer des formules pour $\operatorname{sh}(a+b)$ et $\operatorname{ch}(a+b)$.

Correction

On a $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$ et $\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(b)\operatorname{ch}(a)$.

Exercice 15. ●○○ –●●● Dessiner le graphe des fonctions suivantes (on fera très attention à leur ensemble de définition).

1. $f : x \mapsto \mathrm{Arccos}\left(\sqrt{\dfrac{1+\cos(x)}{2}}\right)$

Correction

f est définie sur $\mathbb{R}$ et, par parité et 2π-périodicité de cos< f est paire et 2π-périodique : il suffit donc de l'étudier sur $[0, \pi]$. Soit $x \in [0, \pi]$. Posons $y = \dfrac{x}{2}$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{1+\cos(x)}{2} &= \frac{1+\cos(2y)}{2} \\ &= \frac{1+2\cos^2(y)-1}{2} \\ &= \cos^2(y).\end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{Arccos}\left(\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}\right) = \mathrm{Arccos}\left(|\cos(y)|\right) = \mathrm{Arccos}\left(\cos(y)\right) = y,$$

car $y \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. $g : x \mapsto \mathrm{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2})$

3. $h : x \mapsto \mathrm{Arctan}(\sqrt{1+x^2}-x)$

Correction

Pour calculer $\mathrm{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2})$, expression définie pour $x \in [-1, 1]$, prenons $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ tel que $x = \sin(\theta)$. Alors

$$\begin{aligned}2x\sqrt{1-x^2} &= 2\sin(\theta)|\cos(\theta)| = 2\sin(\theta)\cos(\theta) \text{ car } \theta \in [-\pi/2, \pi/2] \\ &= \sin(2\theta).\end{aligned}$$

- si $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$, alors $\mathrm{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}) = \mathrm{Arcsin}(\sin(2\theta)) = 2\theta$,
- si $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{4}\right]$, alors $2\theta \in \left[-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc
$$\mathrm{Arcsin}(\sin(2\theta)) = -\mathrm{Arcsin}(\sin(2\theta+\pi)) = -(2\theta+\pi),$$
- si $\theta \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, alors $2\theta \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, donc
$$\mathrm{Arcsin}(\sin(2\theta)) = -\mathrm{Arcsin}(\sin(2\theta-\pi)) = -(2\theta-\pi).$$

Pour le calcul de $\mathrm{Arctan}(\sqrt{1+x^2}-x)$, posons $\theta = \mathrm{Arctan}(x)$. Alors

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x^2}-x &= \sqrt{1+\tan^2(\theta)}-\tan(\theta)\\
&= \frac{1}{\cos(\theta)}-\tan(\theta)\\
&= \frac{1-\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\\
&= \frac{\cos^2(\theta/2)+\sin^2(\theta/2)-2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2)-\sin^2(\theta/2))}\\
&= \frac{(\cos(\theta/2)-\sin(\theta/2)))^2}{\cos^2(\theta/2)-\sin^2(\theta/2))}\\
&= \frac{\cos(\theta/2)-\sin(\theta/2))}{\cos(\theta/2)+\sin(\theta/2))}\\
&= \frac{1-\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)},\\
&= \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)-\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\\
&= \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Arctan}(\sqrt{1+x^2}-x) = \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}$.

Exercice 16. ●○○ Résoudre l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $2^x+3^x=5$.

Correction

Cette équation a une solution évidente : $x=1$. Maintenant, considérons la fonction $f : x \mapsto 2^x+3^x$. Cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc l'équation $f(x)=5$ n'admet qu'au plus une solution.

Exercice 17. ●○○ Déterminer les limites en $+\infty$ des expressions suivantes :

$$\frac{x^3-2x^5}{4x^5+1}, \quad \frac{e^{\sqrt{\ln(x)}}}{x}, \quad \sqrt{x+1}-\sqrt{2x+1}.$$

Correction

Déjà, par le cours, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2x^5}{4x^5+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^5}{4x^5} = -\frac{1}{2}$.
Ensuite, si $x \geqslant 1$ et si l'on pose $t=\sqrt{\ln(x)}$,

$$\frac{e^{\sqrt{\ln(x)}}}{x} = \frac{e^t}{e^{t^2}} = e^{t-t^2}.$$

Or, quand $x\to+\infty$, $t\to+\infty$, et $t-t^2 \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, donc $e^{t-t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{e^{\sqrt{\ln(x)}}}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Enfin, si $x > -1/2<$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+1} = \frac{\sqrt{x+1}^2-\sqrt{2x+1}^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+1}} = \frac{-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+1}}$$
$$= -\sqrt{x}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+1}} = \sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{2+\frac{1}{x}}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Exercice 18. ●◐○

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{ch}(ka), \qquad V_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{sh}(ka), \qquad W_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \mathrm{sh}(a+kb)$$

Correction

Pour ces sommes, on aura des résultats analogues au cours et à l'exercice 5 ! En effet, $U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{e}^{ka}+\mathrm{e}^{-ka}}{2}$. On calcule alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{ka} = \sum_{k=0}^{n-1} (\mathrm{e}^{a})^k.$$

Si $a = 0$, la somme est égale à n. Sinon,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{ka} = \frac{1-\mathrm{e}^{na}}{1-\mathrm{e}^{a}}.$$

Ensuite, on utilise une technique d'« argument moitié » :

$$\frac{1-\mathrm{e}^{na}}{1-\mathrm{e}^{a}} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{na}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{na}{2}}-\mathrm{e}^{\frac{na}{2}}\right)}{\mathrm{e}^{\frac{a}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}}-\mathrm{e}^{\frac{a}{2}}\right)} = \mathrm{e}^{\frac{(n-1)a}{2}}\frac{\mathrm{sh}(na/2)}{\mathrm{sh}(a/2)}.$$

De même, on peut montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-ka} = \mathrm{e}^{\frac{-(n-1)a}{2}}\frac{\mathrm{sh}(-na/2)}{sh(a/2)} = \mathrm{e}^{-\frac{(n-1)a}{2}}\frac{\mathrm{sh}(na/2)}{\mathrm{sh}(a/2)},$$

donc
$$U_n = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{(n-1)a}{2}}\frac{\mathrm{sh}(na)}{\mathrm{sh}(a)} + \mathrm{e}^{-\frac{(n-1)a}{2}}\frac{\mathrm{sh}(na/2)}{\mathrm{sh}(a/2)}\right) = \frac{\mathrm{ch}((n-1)a/2\mathrm{sh}(na/2)}{\mathrm{sh}(a)}.$$

On fait de même pour les deux autres sommes !

Exercice 19. ●◐○ Résoudre le système $\begin{cases} \log_x(y)+\log_y(x) = \frac{50}{7} \\ x.y = 256 \end{cases}$

Correction

Il y a plusieurs manières de prendre le problème. Étant donné le second membre de la seconde équation, on peut être tentés de considérer les nombres

$$\alpha = \log_2(x),\ \beta = \log_2(y).$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Alors la première équation se réécrit

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{50}{7},$$

soit $\alpha^2+\beta^2=\alpha\beta\frac{50}{7}$. La seconde équation, quant à elle, s'écrit

$$\alpha+\beta=8,$$

soit, en remplaçant $\beta=8-\alpha$ dans la première équation,

$$\alpha^2+64-16\alpha+\alpha^2=\alpha(8-\alpha)\frac{50}{7},$$

i.e.

$$2\alpha^2-16\alpha+64=\frac{400}{7}\alpha-\frac{50}{7}\alpha^2,$$

i.e.

$$64\alpha^2-512\alpha+7\times 64=0.$$

En divisant par 64, on obtient

$$\alpha^2-8\alpha+7=0,$$

soit

$$(\alpha-1)(\alpha-7)=0.$$

Les deux solutions sont $\alpha=1$ et $\alpha=7$, soit $(\alpha,\beta)=(1,7)$ ou $(\alpha,\beta)=(7,1)$. On a donc

$$(x,y)=(2^\alpha,2^\beta)=(2,128)\text{ ou }(128,2).$$

Exercice 20. ●◐○ Montrer la relation suivante : $4\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)-\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)=\frac{\pi}{4}$.

Correction

C'est la formule dite de **Machin** (John Machin). Elle sert à obtenir une bonne approximation de π. On va déjà calculer $\tan\left(4\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)$. Déjà,

$$\begin{aligned}\tan\left(2\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)&=\frac{2\tan\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)}{1-\tan\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)^2}\\&=\frac{2\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}}\\&=\frac{2}{5-\frac{1}{5}}=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}.\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
\tan\left(4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right) &= \frac{2\tan\left(2\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)}{1-\tan\left(\text{Arctan}\left(2\frac{1}{5}\right)\right)^2}\\
&= \frac{2\times\frac{5}{12}}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2}\\
&= \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{25}{144}}\\
&= \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{25}{144}}\\
&= \frac{120}{119}.
\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
\tan\left(4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\tan\left(4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)+\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{1-\tan\left(4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\\
&= \frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}}\\
&= \frac{120-119}{119+120} = \frac{1}{239}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\tan\left(4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)\right).$$

Il nous reste à montrer que $4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Or, $0 \leqslant \frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$ donc $0 \leqslant \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) \leqslant \text{Arctan}\left(\frac{\pi}{6}\right)$, donc $0 \leqslant 4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) \leqslant \frac{2\pi}{3}$, donc $-\frac{\pi}{4} \leqslant 4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$. D'où le résultat !

Exercice 21. ●◐○

1. Rappeler la formule donnant $\tan(a-b)$ en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$.

Correction

On rappelle que pour tous a, b tels que $a-b \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$,

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}.$$

2. Montrer que si l'on prend 7 réels, il y en a au moins deux, x et y, vérifiant

$$0 \leqslant \frac{x-y}{1+xy} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Correction

Soient $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ 7 réels. Posons pour $k \in [\![1, 7]\!]$

$$\theta_k = \mathrm{Arctan}(x_k).$$

On a alors 7 réels $(\theta_k)_{1\leqslant k\leqslant 7}$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, intervalle de longueur π que l'on peut séparer en 6 intervalles de longueur $\frac{\pi}{6}$. Par le principe des tiroirs il existe deux indices $i \neq j$ tels que

$$0 \leqslant \theta_j - \theta_i \leqslant \frac{\pi}{6},$$

soit, par croissance de la fonction tangente sur $[0, \pi/2[$,

$$0 \leqslant \tan(\theta_j - \theta_i) \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}},$$

soit

$$0 \leqslant \frac{\tan(\theta_j) - \tan(\theta_i)}{1 + \tan(\theta_j)\tan(\theta_i)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}},$$

ou encore

$$0 \leqslant \frac{x_j - x_i}{1 + x_i x_j} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Il s'agit du résultat désiré.

Exercice 22. *Fonction* Argsh. ●●○

1. Soit x dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique t dans $\mathbb{R}$ tel que $\mathrm{sh}(t) = x$. On appelle ce réel t l'argument sinus hyperbolique de x et on le note $\mathrm{Argsh}(x)$. La fonction Argsh est ainsi la bijection réciproque de sh.

Correction

Il y a deux manières de résoudre cette question :

- **Par le théorème des valeurs intermédiaires** : la fonction sh est **continue**, **strictement monotone**, tend vers $-\infty$ en $+\infty$ donc est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- **En résolvant une équation :** On résout l'équation d'inconnue $t \in \mathbb{R}$: $\mathrm{sh}(t) = x$. On raisonne par équivalences :

$$\mathrm{sh}(t) = x \Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2} = x \Leftrightarrow \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t} = 2x \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2t} - 1 = 2x\mathrm{e}^t,$$

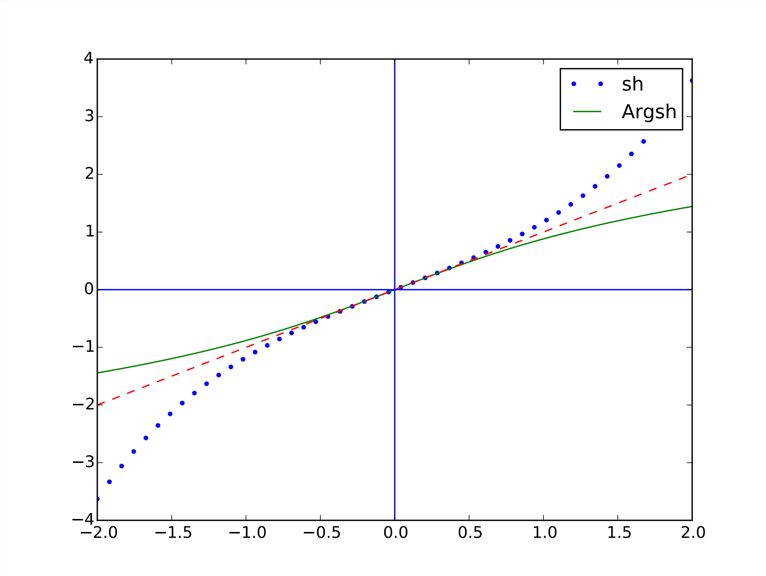
en multipliant par e^t et car $\mathrm{e}^t > 0$ pour tout t. Donc $\mathrm{sh}(t) = x$ si, et seulement si $(\mathrm{e}^t)^2 - 2x\mathrm{e}^t - 1 = 0$, i.e. ssi e^t est solution de $T^2 - 2xT - 1 = 0$, d'inconnue T. Cette équation a pour discriminant $4x^2 + 4 > 0$, d'où deux solutions, $\frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$. Or, $T > 0$ donc nécessairement $T = x + \sqrt{x^2+1}$. Donc $\mathrm{e}^t = x$ ssi $t = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. Ainsi $\boxed{\mathrm{Argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).}$

2. Tracer l'allure du graphe de Argsh. Préciser ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Correction

Il suffit de faire le symétrique du graphe de sh !



3. Déterminer une expression de la dérivée de Argsh.

Correction

Là, pour le coup, je vais directement utiliser mon expression ! On sait que $\mathrm{Argsh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Argsh}'(x) &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\times 2x\right)\\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.\end{aligned}$$

4. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\mathrm{Argsh}(2x\sqrt{x^2+1}) = 2\mathrm{Argsh}(x)$$

Correction

Je vais proposer deux méthodes :

- En utilisant l'expression explicite : On sait que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Argsh}(2x\sqrt{x^2+1}) &= \ln\left(2x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{\left(2x\sqrt{x^2+1}\right)^2+1}\right)\\
&= \ln\left(2x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{4x^2(x^2+1)+1}\right)\\
&= \ln\left(2x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(2x^2)^2+4x^2+1}\right)\\
&= \ln\left(2x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(2x^2+1)^2}\right)\\
&= \ln\left(2x\sqrt{x^2+1}+2x^2+1\right)\\
&= \ln\left(x^2+12x\sqrt{x^2+1}+x^2\right)\\
&= \ln\left((x+\sqrt{x^2+1})^2\right) = 2\ln(x+\sqrt{x^2+1}) = 2\operatorname{Argsh}(x),
\end{aligned}$$

  d'où le résultat.

- Autre méthode (à mon sens plus naturelle) : pour montrer que deux expressions sont égales, il suffit de montrer que leurs sh sont égaux. On remarque d'abord que si $y \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}(2x) = \dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}$. On veut établir une formule un peu comme pour le sinus. Calculons alors

$$2\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x) = 2\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) = 2\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{4} = \operatorname{sh}(2x).$$

  Ainsi, $\operatorname{sh}\left(\operatorname{Argsh}(2x\sqrt{x^2+1})\right) = 2x\sqrt{x^2+1}$ et

$$\operatorname{sh}(2\operatorname{Argsh}(x)) = 2\operatorname{sh}(\operatorname{Argsh}(x))\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh}(x)) = 2x\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh}(x)).$$

  Mais $\operatorname{ch}^2(x)-\operatorname{sh}^2(x) = 1$ donc $\operatorname{ch}^2(x) = \operatorname{sh}^2(x)+1$ et, comme ch est positif, $\operatorname{ch}(x) = \sqrt{\operatorname{sh}^2(x)+1}$, donc

$$\operatorname{sh}(2\operatorname{Argsh}(x)) = 2x\sqrt{\operatorname{sh}^2(\operatorname{Argsh}(x))+1} = 2x\sqrt{x^2+1}.$$

  Les deux quantités $\operatorname{Argsh}(2x\sqrt{x^2+1})$ et $2\operatorname{Argsh}(x)$ ont même sh et sh est bijectif, donc elles sont égales.

Exercice 23. *Autour de la fonction* th. ●◐○

1. Soient a et b deux réels. Montrer que $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b)+\operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$. On admettra que, de même, $\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b)+\operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b)$.

Correction

On calcule l'expression de droite (c'est plus malin)

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b)+\mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b) &= \frac{\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^{-a}}{2}\frac{\mathrm{e}^b+\mathrm{e}^{-b}}{2}+\frac{\mathrm{e}^a-\mathrm{e}^{-a}}{2}\frac{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^{-b}}{2}\\
&= \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^a\mathrm{e}^b+\mathrm{e}^a\mathrm{e}^{-b}+\mathrm{e}^{-a}\mathrm{e}^b+\mathrm{e}^{-a}\mathrm{e}^{-b}+\mathrm{e}^a\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a\mathrm{e}^{-b}-\mathrm{e}^{-a}\mathrm{e}^b+\mathrm{e}^{-a}\mathrm{e}^{-b}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(2\mathrm{e}^{a+b}+2\mathrm{e}^{-a-b}\right)\\
&= \frac{\mathrm{e}^{a+b}+\mathrm{e}^{-(a+b)}}{2}\\
&= \mathrm{ch}(a+b).
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Déduire des formules précédentes une formule pour $\mathrm{th}(a+b)$.

Correction

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathrm{th}(a+b) &= \frac{\mathrm{sh}(a+b)}{\mathrm{ch}(a+b)}\\
&= \frac{\mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b)+\mathrm{sh}(b)\mathrm{ch}(a)}{\mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b)+\mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)}.
\end{aligned}$$

Divisons par $\mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b)$ au numérateur et au dénominateur.

$$\begin{aligned}
\mathrm{th}(a+b) &= \frac{\frac{\mathrm{sh}(a)}{\mathrm{ch}(a)}+\frac{\mathrm{sh}(b)}{\mathrm{ch}(b)}}{1+\frac{\mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)}{\mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b)}}\\
&= \frac{\mathrm{th}(a)+\mathrm{th}(b)}{1+\mathrm{th}(a)\mathrm{th}(b)}
\end{aligned}$$

3. Soit y dans $]-1,1[$. Résoudre l'équation

$$\mathrm{th}(x)=y,$$

d'inconnue réelle x. On fera un changement de variables $X=\mathrm{e}^x$.

Correction

Deux résolutions sont proposées : une par analyse-synthèse et une par équivalences.
Par analyse-synthèse.
Soit x **une solution de l'équation** $\mathrm{th}(x)=y$. Alors $\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=y$. Posons $X=\mathrm{e}^x$. Alors $\dfrac{X-\frac{1}{X}}{X+\frac{1}{X}}=y$, donc $\dfrac{X^2-1}{X^2+1}=y$, donc $(X^2-1)=y(X^2+1)$. Donc $(1-y)X^2=1+y$. Comme $y\in]-1,1[$, $1-y>0$, donc $X^2=\dfrac{1+y}{1-y}$. Or, $1+y>0$, donc $\dfrac{1+y}{1-y}>0$, donc $X=\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}$, donc $\mathrm{e}^x=\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}$, donc $x=\ln\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}$.
Réciproquement un tel x est solution.

Par équivalences : ATTENTION à la rédaction.
Soit x dans $\mathbb{R}$. **Notons** $X = e^x$. (y est déjà déclaré ! !)
Alors

$$\begin{aligned}
\text{th}(x) = y &\Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y \\
&\Leftrightarrow \frac{X - \frac{1}{X}}{X + \frac{1}{X}} = y \\
&\Leftrightarrow \frac{X^2 - 1}{X^2 + 1} = y \text{ car } X \neq 0 \\
&\Leftrightarrow X^2 - 1 = y(X^2 + 1) \\
&\Leftrightarrow X^2(1 - y) = 1 + y \\
&\Leftrightarrow X^2 = \frac{1 + y}{1 - y} \text{ car } y \neq 1 \\
&\Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1 + y}{1 - y} \\
&\Leftrightarrow 2x = \ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right) \text{ car } 1 + y > 0 \text{ et } 1 - y > 0 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right).
\end{aligned}$$

Donc l'équation admet une unique solution : $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right)$.

4. Démontrer que th est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$. On note Argth et on prononce « argument tangente hyperbolique » sa bijection réciproque.

Correction

Une application f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$ si l'une des trois assertions équivalentes est vérifiée :

(a) f est injective et bijective.

(b) $\forall y \in]-1, 1[, \ \exists! x \in \mathbb{R}, \ f(x) = y$.

(c) Il existe g de $]-1, 1[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_{]-1,1[}$.

Ici, on a montré en question précédente que $\forall y \in]-1, 1[, \ \exists! x \in \mathbb{R}, \ f(x) = y$. D'où la bijectivité de th, et $\text{Argth}(y) = \ln\sqrt{\frac{1 + y}{1 - y}}$.

5. Soit t un réel dans $]-1, 1[$. Simplifier $\text{th}(\text{Argth}(t))$, $\text{ch}(\text{Argth}(t))$ et $\text{sh}(\text{Argth}(t))$.

Correction

Étant donnée la résolution de l'équation précédente, $\text{th}(\text{Argth}(t)) = t$. Ensuite, on sait que $\frac{1}{\text{ch}^2(t)} = \frac{\text{ch}^2(t) - \text{sh}^2(t)}{\text{ch}^2(t)} = 1 - \text{th}^2(t)$, donc, comme ch est toujours positif,

$$\text{ch}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{th}^2(t)}},$$

donc

$$\text{ch}(\text{Argth}(t)) = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

On en déduit que $\mathrm{sh}(\mathrm{Argth}(t)) = \mathrm{th}(\mathrm{Argth}(t)) \times \mathrm{ch}(\mathrm{Argth}(t)) = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$.

6. On admet la dérivabilité de la fonction $x \mapsto \mathrm{Argth}(x)$. Montrer que sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$.

Correction

On sait que pour tout t de $]-1,1[$, $\mathrm{th}(\mathrm{Argth}(t)) = t$. En dérivant par rapport à t, il vient $\mathrm{Argth}'(t)(1-\mathrm{th}(\mathrm{Argth}(t))^2) = 1$, i.e. $\mathrm{Argth}'(t) = \dfrac{1}{1-t^2}$.

7. Montrer que pour tout x dans $[0,1[$, $\mathrm{th}(x) \leqslant x \leqslant \mathrm{Argth}(x)$.

Correction

Étudions, pour $x \in [0,1[$, $f : x \mapsto \mathrm{Argth}(x) - x$. Alors pour tout x dans $[0,1[$, $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2} - 1 = \dfrac{1-(1-x^2)}{1-x^2} = \dfrac{x^2}{1-x^2} > 0$. Donc f est strictement croissante sur $[0,1[$. Nulle en 0, elle est donc positive sur $[0,1[$.
On étudie ensuite, pour tout x de $[0,1[$, $g : x \mapsto x - \mathrm{th}(x)$. Alors pour tout x dans $\mathbb{R}$, $g'(x) = 1-(1-\mathrm{th}^2(x)) = \mathrm{th}^2(x) \geqslant 0$, donc g est croissante sur $[0,1[$. Nulle en 0 elle est positive.

8. Représenter sur un même graphe les courbes de $x \mapsto \mathrm{th}(x)$ et $x \mapsto \mathrm{Argth}(x)$.

Exercice 24. *Séries de sinus hyperboliques*. ●●○ On définit, pour tout entier naturel n, la somme S_n par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{sh}\left(\frac{1}{k}\right).$$

On rappelle que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$.

1. Détermination de la limite de S_n

(a) Montrer que pour tout réel positif x, $\mathrm{sh}(x) \geqslant x$.

Correction

Étudions la fonction $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{sh}(x) - x \end{array}$. Alors $f(0) = 0$ et pour tout x réel, $f'(x) = \mathrm{ch}(x) - 1$. Sur $\mathbb{R}_+$, ch est croissante, et $\mathrm{ch}(0) - 1 = 0$, donc f' est positive sur $\mathbb{R}_+$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $f(0) = 0$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \geqslant 0, \text{ i.e. } \mathrm{sh}(x) \geqslant x.$$

(b) En déduire la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction

Soit k un entier naturel non nul. Alors

$$\mathrm{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \geqslant \frac{1}{k}.$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Donc
$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$, donc
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right) = +\infty.$$

On pose, pour tout p dans $\mathbb{N}$,
$$\mathcal{S}_n^p = \sum_{k=n}^{np} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right).$$

Pour étudier la limite de cette somme lorsque n tend vers $+\infty$, on va d'abord établir une inégalité utile sur le sinus hyperbolique.

2. Pour tout x réel, on pose $f(x) = e^{\operatorname{sh}(x)} - (x+1)$.

(a) Calculer f' et montrer que $f''(x) = (\operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}^2(x))e^{\operatorname{sh}(x)}$.

Correction

Pour tout x réel,
$$f'(x) = \operatorname{ch}(x)e^{\operatorname{sh}(x)} - 1.$$

Donc
$$f''(x) = \operatorname{sh}(x)e^{\operatorname{sh}(x)} + \operatorname{ch}^2(x)e^{\operatorname{sh}(x)} = (\operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}^2(x))e^{\operatorname{sh}(x)}.$$

(b) Exprimer f'' en fonction de e et de sh uniquement.

Correction

On utilise la relation $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$, donc pour tout x réel
$$f''(x) = (\operatorname{sh}(x) + \operatorname{sh}^2(x) + 1)e^{\operatorname{sh}(x)}.$$

(c) En déduire que $f(x) \geqslant 0$ pour tout x réel.

Correction

Montrons que pour tout x réel, $\operatorname{sh}(x) + \operatorname{sh}^2(x) + 1$ est positif. Étudions le signe de
$$X^2 + X + 1.$$

Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. Donc le polynôme $X \mapsto X + X^2 + 1$ est de signe constant (positif) sur $\mathbb{R}$, donc, pour tout x réel, $\operatorname{sh}(x) + \operatorname{sh}^2(x) + 1$ est positif. Donc f'' est positive sur $\mathbb{R}$, donc f' est croissante sur $\mathbb{R}$.
Or $f'(0) = 0$, donc f' est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$. Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Or $f(0) = 0$, donc f est positive sur tout $\mathbb{R}$.

(d) En déduire
$$\forall x > -1,\ \ln(x+1) \leqslant \mathrm{sh}(x).$$

Correction

Soit x un réel strictement supérieur à -1. Alors
$$e^{\mathrm{sh}(x)} - (x+1) \geqslant 0,$$
donc
$$e^{\mathrm{sh}(x)} \geqslant x+1.$$
Or, $x > -1$ donc $x+1 > 0$, donc $\ln(x+1)$ est défini. Donc, par croissance de ln,
$$\mathrm{sh}(x) \geqslant \ln(x+1).$$

(e) En déduire
$$\forall x \in [0,1[,\ \ln(x+1) \leqslant \mathrm{sh}(x) \leqslant \ln\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

Correction

Soit x dans $[0,1[$. On sait déjà que
$$\ln(x+1) \leqslant \mathrm{sh}(x). \tag{$*$}$$

Posons $y = -x$. Alors $y > 1$, donc $\ln(y+1) \leqslant \mathrm{sh}(y)$, soit
$$\ln(1-x) \leqslant \mathrm{sh}(-x),$$
donc $\ln(1-x) \leqslant -\mathrm{sh}(x)$, donc $-\ln(1-x) \geqslant \mathrm{sh}(x)$. On en déduit que
$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \geqslant \mathrm{sh}(x). \tag{$**$}$$
En combinant ($*$) et ($**$), on obtient
$$\ln(x+1) \leqslant \mathrm{sh}(x) \leqslant \ln\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

3. Étude de $\mathcal{S}_n^p$.

(a) Montrer que pour tout entier naturel $k \geqslant 2$,
$$\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \mathrm{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant \ln(k) - \ln(k-1).$$

Correction

Soit k un entier naturel non nul. Alors
$$\ln\left(\frac{1}{k}+1\right) \leqslant \mathrm{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right).$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Or,

$$\ln\left(\frac{1}{k}+1\right)=\ln\left(\frac{1+k}{k}\right)=\ln(k+1)-\ln(k).$$

De même,

$$\ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right)=\ln\left(\frac{1}{\frac{k-1}{k}}\right)=\ln\left(\frac{k}{k-1}\right)=\ln(k)-\ln(k-1).$$

(b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$\ln\left(\frac{np+1}{n}\right)\leqslant \mathcal{S}_n^p \leqslant \ln\left(\frac{np}{n-1}\right).$$

Correction

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, p un entier naturel non nul (il n'était pas déclaré dans l'énoncé, mais bon, autant le faire ici : pas de point retiré si vous ne l'avez pas déclaré). Alors, par l'inégalité précédente,

$$\sum_{n}^{np}\ln(k+1)-\ln(k)\leqslant \sum_{n}^{np}\operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right)\leqslant \sum_{n}^{np}\ln(k)-\ln(k-1).$$

Les sommes de gauche et de droite sont des sommes télescopiques, donc

$$\ln(np+1)-\ln(np)\leqslant \sum_{n}^{np}\operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right)\leqslant \ln(np)-\ln(n-1),$$

i.e.

$$\ln\left(\frac{np+1}{n}\right)\leqslant \mathcal{S}_n^p \leqslant \ln\left(\frac{np}{n-1}\right).$$

(c) En déduire la limite de $\mathcal{S}_n^p$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction

Soit p un entier naturel non nul, n un entier naturel non nul. Alors
$$\frac{np+1}{n} = p + \frac{1}{n},$$
donc
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{np+1}{n} = p,$$
donc
$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{np+1}{n}\right) = \ln(p).$$
de même,
$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{np}{n-1}\right) = \ln(p).$$
Donc, par théorème d'encadrement,
$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{S}_n^p = \ln(p).$$

Indications.

1 Distinguer trois zones : $x \in]-\infty, 1]$, $x \in [1, 2]$ et $x \in [2, +\infty[$.

2 Commencer par « Soit $a > 0$ ». Déterminer ensuite la tangente au graphe en un point x_0, et chercher x_0 tel que cette tangente passe par O.

3 **1.** Étudier $\varphi : x \mapsto \ln(x) - \ln(x+y) - y\ln(x) = (1-y)\ln(x) - \ln(x+y)$
2. Conséquence directe

5 **1.** Utiliser que $\sin(a+kb) = \mathfrak{Im}(e^{ia}(e^{ib})^k)$.
2. Utiliser l'expression de $\cos^2$ en fonction de tan.

6 Écrire $z = \rho e^{i\theta} = \ldots$.

7 Démontrer que ces quantités ont même tangente et vérifier qu'ils appartiennent au même intervalle.

8 **1.** Commencer par « soit y » ...
2. Deux possibilités : utiliser les variations de ch ou l'expression exacte.
3. Idem !
4. Attention, penser que $\cos(\mathrm{Arccos}(x))$ et $\mathrm{Arccos}(\cos(x))$ ne se simplifient pas toutes deux : c'est pareil pour ch.

9 **1.** Faire des translations.
2. C'est une homographie.
3. C'est un graphe modulé.
4. Attention, ce n'est pas toujours égal à x.

10

11 **1.**
2. Attention à la dérivée d'une composée.
3. Prendre $x = 0$ dans l'équation de la tangente.
4.

12 Poser $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ les deux centres de symétrie. Considérer comme g la fonction affine qui passe par ces deux points.

13 Utiliser que $\log_a$ est la bijection réciproque de $x \mapsto a^x$.

14 Utiliser le binôme de Newton.

15 **1.** Poser $y = \dfrac{x}{2}$ et discuter selon le signe de $\cos(y)$.

2. Poser $x = \sin(\theta)$
3. Poser $\theta = \text{Arctan}(x)$ et montrer que $\text{Arctan}(\sqrt{1+x^2} - x) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2}$.

16 Trouver une solution, montrer que c'est la seule en étudiant la fonction.

17 Utiliser proprement : le fait que l'on puisse prendre les termes polynomiaux de plus haut degré, les croissances comparées (si nécessaire), la quantité conjuguée.

18 Utiliser le fait que $\text{ch}(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}$ et procéder de même que pour $\sum \sin(k\theta)$.

19 Déterminer une équation vérifiée par $\log_2(x)$ et $\log_2(y)$. Penser notamment que $\log_x(y) = \dfrac{\log_2(y)}{\log_2(x)}$.

20 Prendre l'arctangente des deux memebres.

21 Si $(x_1, \ldots, x_7)$ sont ces 7 réels, les interpréter comme $(\tan(\theta_1), \ldots, \tan(\theta_7))$, et utiliser le principe des tiroirs.

23
1. C'est du quasi-cours.
2. Revoir comment on obtient $\tan(a+b)$.
3. Indication déjà donnée.
4.
5. Penser que $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$ et $\text{th} = \dfrac{\text{sh}}{\text{ch}}$.
6.
7. Faire des études de fonctions
8.

22 Exercice déjà fait en classe avec ch.

24
1. (a) Faire une étude de fonctions.
   (b) Minorer chaque terme de la somme.
2. (a)
   (b) Penser que $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$.
   (c)
   (d) Déduire des questions précédente une égalité que l'on passera au ln.
   (e) Pour l'égalité de droite, utiliser $y = -x$.
3. (a) Utiliser l'inégalité précédente.
   (b) Sommer et reconnaître un télescopage.
   (c) Utiliser le théorème des gendarmes.