

TD 5 Applications, relations

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. *Quelques exemples.* ●○○○

1. Déterminer l'image de $] -1, 3]$ et l'image réciproque de $[-1, 2]$ par l'application $x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$. On ne demande pas de justification.
2. Soit $f = \sin$, $I = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$. Déterminer $f(f^{-1}(I))$.
3. Soit g l'application exponentielle de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Déterminer $g^{-1}\left(g\left(\left\{0, i\frac{\pi}{2}\right\}\right)\right)$.

Exercice 2. *Images, images réciproques.* ●●○○ Soient E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ une application, A, A' des parties de E , B, B' des parties de F . Comparer les ensembles suivants (y a-t-il inclusion ? inclusion réciproque ? égalité ?) Dans les cas où il n'y a pas, en général, égalité, exhiber un contre-exemple.

1. $f^{-1}(f(A))$ et A .
2. $f(f^{-1}(B))$ et B .
3. $f(A \cap A')$ et $f(A) \cap f(A')$.
4. $f(A \cup A')$ et $f(A) \cup f(A')$.
5. $f^{-1}(B \cap B')$ et $f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.
6. $f^{-1}(B \cup B')$ et $f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.

Exercice 3. ●●●● Soient E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ une application.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur f pour que $\forall A \subset E, f^{-1}(f(A)) = A$.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur f pour que $\forall B \subset F, f(f^{-1}(B)) = B$.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur f pour que $\forall (A, A') \in \mathcal{P}(E)^2, f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.

Exercice 4. ●●○○ Soient E un ensemble et $f : E \rightarrow E$ telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que f est injective si, et seulement si, f est surjective.

Exercice 5. ●●●● On veut montrer qu'il n'existe pas de surjection d'un ensemble dans l'ensemble de ses parties.

1. Pourquoi est-ce évident dans le cas d'un ensemble fini ?
2. Soit E un ensemble, $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$. On pose

$$A = \{x \in E, x \notin f(x)\}.$$

Montrer que A n'a pas d'antécédent par f et conclure.

Exercice 6. ●○○○ Soit $\mathcal{R}$, la relation binaire définie sur $\mathbb{R}$ par $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x.e^{-y} = y.e^{-x}$. Montrer que $\mathcal{R}$ est bien une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ et préciser, selon les valeurs de x , le nombre d'éléments de la classe d'équivalence de x .

Exercice 7. ●●○○ On considère $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \subset)$. Soit

$$E = \left\{ \left[-\frac{1}{n}, n \right], n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

L'ensemble E possède-t-il un plus grand élément ? Possède-t-il un majorant ?

Stratégie Les exercices corrigés en classe sont fondamentaux (je ne le répéterai jamais assez). Dans ce TD, **ne sautez pas de questions sans les avoir rédigées**. Ensuite, il faut faire

- des exercices sur les applications : faire par exemple l'exercice 9. Ensuite faire l'exercice 11 pour manipuler des images de fonctions. Enfin, faire le 13, **fondamental**.
- un peu d'exercices sur les relations : l'exercice 20 (1.) et le début du problème 25.
- pour aller plus loin, des exercices très intéressants comme le 14, le 15 ou le 25

2 Applications

Exercice 8. *Un exemple arithmétique.* ●●○ Soit φ l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\varphi(n)$ est le reste de la division euclidienne de n par 3.

1. La fonction φ est-elle injective ?
2. Déterminer $\varphi^{-1}(\{1\})$.

Soit ψ l'application de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ définie par

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \psi(n, m) = 2^n 3^m.$$

3. Démontrer que ψ est injective.
4. ψ est-elle surjective ?

Exercice 9. *Deux exemples complexes.* ●●○

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, et φ_θ l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_\theta(n) = (e^{i\theta})^n.$$

Démontrer que φ_θ n'est pas injective si, et seulement si $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$.

2. Soient P le demi-plan complexe $\{x \in \mathbb{C}, \Im(z) > 0\}$ et D le disque unité ouvert $\{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$. Soit φ l'application de $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}, \varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$

Montrer que φ réalise une bijection de P sur D .

Exercice 10. *Applications linéaires.* ●●○

1. Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$(a) f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (2x + y, y - x) \end{cases}$$

$$(c) f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x + 2y, y - x, x + y) \end{cases}$$

$$(b) f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x + y \end{cases}$$

$$(d) f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y + z, y - x + 2z, 2y + 3z) \end{cases}$$

Exercice 11. ●●○ Soient E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ une application, A une partie de E et B une partie de F . Montrer, en s'inspirant de la preuve du cours, que

$$f(f^{-1}(f(A))) = f(A).$$

et que

$$f^{-1}(f(f^{-1}(B))) = f^{-1}(B).$$

Exercice 12. ●●○ Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$. Montrer que :

1. Si $g \circ f$ est injective et f est surjective alors g est injective.
2. Si $g \circ f$ est surjective et g est injective alors f est surjective.

Exercice 13. ●●○ Soit $f : E \rightarrow E$ une application telle que $f \circ f = f$. Montrer que si f est injective ou surjective, alors $f = \text{Id}_E$.

Exercice 14. ●●○ Soit E un ensemble, A et B deux parties de E .

1. À quelle CNS sur A l'application $\varphi_A : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E) \\ X \mapsto X \cap A \end{cases}$ est-elle injective ? Surjective ?
2. À quelle CNS sur A l'application $\psi_A : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E) \\ X \mapsto X \cup A \end{cases}$ est-elle injective ? Surjective ?
3. À quelle CNS sur A et B l'application $\theta_{A,B} : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \\ X \mapsto (X \cap A, X \cap B) \end{cases}$ est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 15. ●●○ Soit E un ensemble non vide et a un élément de E .

On définit des ensembles F , M et N et une application g de la façon suivante :

- $F = E \setminus \{a\}$;
 - $M = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid a \in X\}$;
 - $N = \mathcal{P}(F)$;
 - $g : \begin{cases} M \rightarrow \mathcal{P}(E) \\ X \mapsto X \cap F \end{cases}$
1. Montrer que M et N sont non vides et constituent une partition de $\mathcal{P}(E)$ (c'est-à-dire que $M \cap N = \emptyset$ et que $M \cup N = \mathcal{P}(E)$).
 2. Montrer que $\text{Im}(g) \subset N$.
 3. Démontrer que g est une bijection de M sur N et donner une expression de sa bijection réciproque.
 4. Soit h l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ définie comme suit :
Pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, $h(X) = g(X)$ si $X \in M$ et $h(X) = g^{-1}(X)$ si $X \in N$.
Montrer que h est une bijection de $\mathcal{P}(E)$ sur $\mathcal{P}(E)$.
 5. En déduire que, dans tout ensemble fini non vide, il y a autant de parties ayant un nombre pair d'éléments que de parties ayant un nombre impair d'éléments.

Exercice 16. ●●○ Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissantes telles que $f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 17. ●●○ Déterminer toutes les injections $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telles que pour tout entier naturel $f(n) \leq n$.

Exercice 18. Sur les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. ●●○

1. Existe-t-il une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui soit strictement décroissante ?
2. Existe-t-il une application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui ne soit pas croissante ?
3. (●●●) Que dire de la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de $f(n)$, où f est une application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

3 Relations

Exercice 19. ●○○ On considère dans le plan $\mathbb{R}^2$ rapporté à une origine O la relation binaire définie par MRN si et seulement si O , M et N sont alignés. Est-ce une relation d'équivalence ?

Exercice 20. ●○○ On définit sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ la relation binaire $\sim$ par

$$[(p, q) \sim (p', q')] \Leftrightarrow pq' = p'q.$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. ●●● À quoi correspond l'ensemble quotient $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* / \sim$?

Exercice 21. ●●● Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées. On pose $A + B = \{x + y, x \in A, y \in B\}$. Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure et que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 22. ●●○ Soit E un ensemble de cardinal n .

1. Combien peut-on définir de relations binaires sur E ?
2. Combien sont réflexives ?
3. Combien sont symétriques ?

Exercice 23. ●●● Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné non vide. On suppose que toute partie non vide de E admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Soit $f : E \rightarrow E$ une application croissante.

On pose $A = \{x \in E, x \preceq f(x)\}$. Montrer que A est non vide, admet une borne supérieure a et que $a = f(a)$.

Exercice 24. Comment rendre une application injective ? ●●● Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$.

1. On définit la relation $\sim$ par $(x \sim y) \Leftrightarrow (f(x) = f(y))$. Montrer que cette relation est relation d'équivalence.
2. Décrire les classes d'équivalence sous $\sim$. Comment traduire en termes de classes d'équivalence la propriété « f est injective ».
3. Sur $E / \sim$, on définit l'application $\bar{f}$ comme suit :

$$\bar{f} : \begin{cases} E / \sim \rightarrow F \\ \bar{x} \mapsto \bar{f}(\bar{x}) = f(x) \end{cases}$$

Montrer que $\bar{f}$ est bien définie (c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du choix du représentant) et qu'elle est injective.

Exercice 25. Ordres non totaux et prolongements. ●○○ - ●●●

Les questions marquées d'une étoile (*) sont des questions plus difficiles pour les plus algébristes d'entre vous.

1. COURS Soit E un ensemble, $\preceq$ une relation binaire sur E . Définir « $\preceq$ est une relation d'ordre sur E ».
2. (cette question est indépendante des questions suivantes) Soit $(E, \preceq)$ un ensemble muni d'une relation d'ordre. Soit f une application de E dans E , et $\triangleleft_f$ la relation binaire sur E définie par

$$\forall (x, y) \in E^2, x \triangleleft_f y \Leftrightarrow f(x) \preceq f(y).$$

- (a) Démontrer que $\triangleleft_f$ est réflexive et transitive.

- (b) Démontrer que $\triangleleft_f$ est une relation d'ordre si et seulement si f est injective.
On raisonnera par double implication et on fera très attention au squelette de la démonstration. Cette question rapportera beaucoup de points, faites-la soigneusement.
- (c) **COURS** Définir « $\preceq$ est une relation d'ordre total » .
- (d) Dans le cas où f est bijective, démontrer que $\triangleleft_f$ est une relation d'ordre total si et seulement si $\preceq$ est une relation d'ordre total.

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble muni d'une relation d'ordre. Soit $\leq$ une autre relation d'ordre sur E . On dit que $\leq$ est un **prolongement** de la relation $\preceq$ si

$$\forall (x, y) \in E^2, x \preceq y \Rightarrow x \leq y.$$

On dit que c'est un **prolongement total** si $\leq$ est un prolongement de $\preceq$ et $\leq$ est totale.

3. (a) **COURS** On rappelle que la relation de divisibilité $|$ sur $\mathbb{N}$ est définie par

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, m|n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, n = km.$$

Montrer que cette relation est une relation d'ordre. L'ordre défini est-il total? (on demande une justification)

- (b) Sur $\mathbb{N}^*$, montrer que la relation d'ordre usuel $\leq$ est un prolongement total de la relation de divisibilité $|$. Le résultat fonctionne-t-il toujours sur $\mathbb{N}$?

Le but de la fin de l'exercice est de prolonger totalement une relation d'ordre quelconque sur un ensemble. Soit $(E, \preceq)$ un ensemble muni d'une relation d'ordre. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur E par

$$\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x = y) \text{ ou } (x \text{ et } y \text{ ne sont pas comparables})$$

(pour rappel, on dit que x et y sont comparables si $x \preceq y$ ou $y \preceq x$)

4. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est réflexive et symétrique.
5. On se pose la question de la transitivité de cette relation dans certains cas particuliers :
- (a) Montrer que lorsque $\preceq$ est total, alors $\mathcal{R}$ est transitive.
- (b) Montrer que lorsque $E = \mathbb{N}^*$ et $\preceq$ est la relation de divisibilité, alors la relation n'est pas transitive.

Pour finir l'exercice, on se place dans le cas où E est fini et $\mathcal{R}$ est transitive, i.e. lorsque $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. On définit, pour x et y dans E , $x \prec y$ par « $(x \preceq y)$ et $x \neq y$ ».

6. Questions de cours.

- (a) **COURS** Définir ce qu'est la classe d'équivalence d'un élément de E .

On nomme alors $c_1, \dots, c_n$ les classes d'équivalence de E . Il y en a un nombre fini car E est fini.

- (b) **COURS** Si $i \neq j$, que peut-on dire de $c_i \cap c_j$? Que vaut $\bigcup_{i=1}^n c_i$? (on ne demande pas de justifications)

7. (a) (*) Soient a et b deux éléments de E . Montrer que si $a\mathcal{R}b$ alors on ne peut pas avoir $a \prec b$.
- (b) (*) Soient x, y, x' et y' quatre éléments de E tels que $x\mathcal{R}x'$ et $y\mathcal{R}y'$. Montrer que si $x \prec y$ alors $x' \prec y'$. On pourra commencer par montrer que $x \prec y'$.

Pour chaque classe d'équivalence c_i , on définit une relation d'ordre arbitraire, $\lesssim_i$ (on prend tous les éléments de c_i que l'on ordonne dans l'ordre que l'on souhaite). On définit alors la relation $\lesssim$ sur E par

$$\forall (x, y) \in E^2, (x \lesssim y) \Leftrightarrow (x \prec y) \text{ ou } \left((x \text{ et } y \text{ appartiennent à une même classe d'équivalence } c_i) \text{ et } (x \lesssim_i y) \right)$$

8. (**) Montrer que $\lesssim$ est une relation d'ordre, et que c'est un prolongement total de $\preceq$.

Indications :

- 1
 1. Faire une représentation graphique ou une étude de fonction (on ne demande pas de justification !)
 2. Déterminer les réels x tels que $\sin(x) \in [1/2, 3/2]$. Puis regarder l'image de ces réels par $\sin$.
 3. Résoudre l'équation $e^z = e^0$ et $e^z = e^{i\pi/2}$.
- 2 Les deux premières questions sont du cours. Pour le reste, tenter une double inclusion. Et, si vous bloquez sur une inclusion, c'est peut-être qu'elle n'est pas vraie en général !
- 4 Supposer f injective et montrer qu'elle est surjective, et réciproquement (raisonnement par double implication). Respecter très formellement la manière de rédiger. Et penser que l'injectivité permet de « simplifier » par f .
- 5 Pour la 2, supposer que A admet un antécédent x_0 et se demander si $x_0 \in A$ ou si $x_0 \notin A$.
- 6 Démontrer que cette relation équivaut à $f(x) = f(y)$ pour une certaine fonction f à définir.
- 7 Supposer que E possède un plus grand élément et aboutir à une contradiction. Ensuite penser que tous les éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ sont majorés.
- 8
 1. Regarder 0 et 3.
 2. Écrire, si $x \in \mathbb{N}$, que $x \in \varphi^{-1}(\{1\}) \Leftrightarrow \varphi(x) = 1$ et conclure.
 3. Supposer $\psi(n, m) = \psi(n', m')$ et supposer par exemple que $n \leq n'$.
 4. Penser à 5.
- 9
 1. Faire une double implication, et penser à la négation de l'injectivité.
 2. Résoudre une équation du type $\varphi(z) = \omega$ (c'est une des méthodes importantes pour la bijectivité).
- 10 Revenir à la définition de l'injectivité et de la surjectivité.
- 11 Rédiger **très proprement**, en faisant une double inclusion. Exemple pour la première. **Soit** $y \in f(f^{-1}(f(A)))$. **Alors on dispose de** $x \in f^{-1}(f(A))$ tel que $y = f(x)$...
- 12 Revenir à la définition de « être injectif/être surjectif » **OU** montrer directement que f est une bijection (dans la première question).
- 14
 1. S'intéresser à ce que donne $\varphi_A(X)$ si X est une partie de $E \setminus A$.
 2. S'intéresser à ce que donne $\psi_A(X)$ si X est une partie de A .
 3. Comment « reconstruire » une partie de E en connaissant son intersection avec deux parties de E ?
- 13 **Exercice important.** Supposer que f est injective et montrer que $f = \text{Id}_E$. Supposer que f est surjective et montrer que $f = \text{Id}_E$.
- 15
 1. Montrer que toute partie de E contient a ou ne contient pas a .
 2. Écrire proprement : **soit** $Y \in \mathfrak{I}\mathfrak{m}(g)$.
 3. Montrer que g est injective et surjective. Ou trouver directement sa bijection réciproque.
 4. Écrire proprement l'injectivité et la surjectivité. Pour l'injectivité, il faut faire attention à distinguer, si $(X, X') \in \mathcal{P}(E)$, au cas $(X, X') \in M^2$, $(X, X') \in N^2$ ou $(X, X') \in M \times N$. Remarquer aussi que h envoie les éléments de M sur N et réciproquement.
 5. On pourra poser $A = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid X \text{ a un nombre pair d'éléments}\}$, $B = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid X \text{ a un nombre impair d'éléments}\}$, et examiner l'effet de l'application h sur ces ensembles.
- 16 Procéder par analyse-synthèse. Si $x \in \mathbb{R}$, distinguer les cas $f(x) \leq x$ ou $f(x) \geq x$.

- 17 Démontrer par récurrence sur n que $f(n) = n$.
- 18 **1.** Non (raisonner par l'absurde)
 2. Oui (trouver un exemple)
 3. Montrer que c'est $+\infty$, en utilisant le fait que $f(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty}$ équivaut (par définition) à
- $$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, f(n) \geq M.$$
- 19 Remarquer que ce n'est pas une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$ mais c'en est une sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- 20 **1.** Revenir à la définition.
 2. Remarquer qu'il s'agit d'une définition de $\mathbb{Q}$.
- 21 Démontrer une double inégalité :
- L'inégalité $\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B)$ est assez simple.
 - L'inégalité inverse est plus dure. Commencer ainsi : « Soit a dans A . Alors si b est dans B , $a + b \in A + B$. Donc $a = a + b - b \leq \sup(A + B) - b$. »
- 22 Penser au fait qu'une relation binaire se définit par une « table de relation, à double entrée ».
- 23 Pour montrer que $a \leq f(a)$, utiliser le fait que a est la borne supérieure de A et que $f(a)$ est un majorant de A . Pour l'inégalité réciproque, utiliser la croissance de f pour montrer que $f(a) \in A$.
- 24 Pas d'indication particulière, c'est juste délicat à écrire.
- 25 Il s'agit + d'un entraînement au DS. Me demander si besoin d'indications.