MPSI1 – Programme de colles
Semaine 06 – du 3 au 7 novembre 2025

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Applications et relations	
Application d'un ensemble dans un ensemble. Graphe d'une application.	Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. Notations $\mathscr{F}(E,F)$ et F^E.
Famille d'éléments d'un ensemble.	
Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble.	Notation $\mathbb{1}_A$.
Restriction et prolongement.	Notation $f\|_A$.
Image directe.	Notation $f(A)$.
Image réciproque.	Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre.
Composition.	
Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.	
Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.	Notation f^{-1}. Compatibilité de cette notation avec celle de l'image réciproque.
Relation binaire sur un ensemble.	
Relation d'équivalence, classes d'équivalence.	La notion d'ensemble quotient est hors programme. Les classes d'équivalence forment une partition de l'ensemble sous-jacent. Congruences dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{Z}$. Notation $a \equiv b\ [c]$.
Relation d'ordre. Ordre partiel, total.	

Programme de cette colle : cours et exercices sur les applications et les relations.

Exemples de questions de cours

1. « Associativité » de la composition + Id est un « neutre » pour la composition.
2. Définition de l'image/de l'image réciproque + $A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Contre-exemples à l'aide d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
3. Une composée d'injections est injective ; une composée de surjections est surjective.
4. L'exponentielle complexe est surjective de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{C}$ mais n'est pas injective.
5. Si $f \circ g$ est injective, alors g est injective ; si $f \circ g$ est surjective, alors f est surjective.
6. Équivalence des définitions d'une bijection (injective et surjective / $\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ f(x) = y$ / existence d'une bijection réciproque)
7. Définition d'une relation d'équivalence + montrer qu'une certaine relation est une relation d'équivalence (congruence modulo n sur $\mathbb{Z}$; relation d'équipotence sur $\mathscr{P}(E)$).
8. La divisibilité est une relation d'ordre, non totale, sur $\mathbb{N}$, mais n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$.
9. En admettant que toute partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure, montrer que toute partie minorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.