

TD 6 Intégration

1 Exercices corrigés en classe – calculs avancés

NB : comme il y a eu beaucoup d'exercices dans le poly de cours, ces exercices sont difficiles. C'est normal !

Exercice 1. Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$, ...

- en effectuant le changement de variables $t = \tan \frac{x}{2}$,
- en écrivant que $\frac{1}{\cos(x)} = \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos(x)}{1 - \sin^2(x)}$ (et en faisant éventuellement le changement de variables $y = \sin(x)$ si on ne voit pas d'intégration directe).

Exercice 2. *Lemme de Riemann-Lebesgue.* Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$. Démontrer que, si $\omega \in \mathbb{R}^*$,

$$\int_a^b f(t) \sin(n\omega t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Exercice 3. Représenter la fonction $x \mapsto \int_0^1 \max(x, t) dt$.

Exercice 4. Démontrer que la fonction $x \mapsto \int_0^1 \frac{e^t}{t+x} dt$ est dérivable et déterminer l'expression de sa dérivée.

Exercice 5. À l'aide d'un joli dessin, expliquer pourquoi la suite $\left(\int_0^{4\pi n} \frac{\sin(t)}{t} dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

2 Exercices à faire en TD

Exercice 6. *Calculs directs.* ●○○ - ●●○ Calculer les intégrales ou primitives suivantes, sans utiliser ni IPP, ni changement de variable.

- | | |
|--|--|
| 1. $\int_{-2}^3 (y^2 - y + 4) dy,$ | 2. $\int_0^2 x e^{-3x^2} dx,$ |
| 3. $\int_{-x}^x \frac{1}{(3t+2)^2} dt,$ | 4. $\int_1^4 \frac{\ln(t)}{t} dt,$ |
| 5. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^x \frac{1}{t \ln(t)} dt,$ | 6. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(x) dx,$ |
| 7. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(x) \cos(x) dx,$ | 8. $\int_{-1}^1 \operatorname{sh}(t) dt,$ |
| 9. $\int_{-x}^x \tan^2(t) dt,$ | 10. $\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \operatorname{Arcsin}(t)},$ |
| 11. $\int_{-x}^x \frac{\sin(2\theta)}{1 + \cos^2(\theta)} d\theta$ | 12. $\int \frac{dt}{\cos^2(t) \tan(t)}.$ |

Exercice 7. *Intégration par parties.* ●○○ - ●●○ Calculer les intégrales suivantes, en utilisant une intégration par parties.

1. $\int_0^2 te^t dt,$
2. $\int_1^2 \ln \frac{t-1}{t+1} dt,$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\theta}{\cos^2(\theta)} d\theta$
4. $\int_1^x t^2 e^t dt,$
5. $\int_0^y \ln(1+x^2) dx,$
6. $\int_0^x \operatorname{Arcsin}(t) dt,$
7. $\int_0^x \operatorname{tch}(t) dt,$
8. $\int_0^1 e^{2t} \cos(t) dt.$

Exercice 8. *Changement de variable.* ●○○ - ●●○ Calculer les intégrales suivantes, en effectuant des changements de variable adéquats.

1. $\int_1^x \frac{dt}{t + \sqrt{t}},$
2. $\int_2^y \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx, \text{ où } y > 1,$
3. $\int_1^y \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} dt,$
4. $\int_{-1}^1 \theta^2 \sqrt{1-\theta^2} d\theta,$
5. $\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(t) + \cos(t)} dt,$
6. $\int_1^x \sqrt{e^t - 1} dt.$

Exercice 9. *Orthogonalité des fonctions trigonométriques.* ●●○ Déterminer, en fonction de la valeur de m et n entiers, la valeur de l'intégrale

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt) \cos(nt) dt.$$

Exercice 10. ●●○ Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout x de $[a, b]$, $f(a+b-x) = f(x)$.

1. Interpréter l'égalité en termes de graphe de f .
2. Montrer que

$$\int_a^b xf(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

3. Application : calculer

$$\int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx.$$

Exercice 11. ●●○ Pour tous entiers naturels n et p on pose

$$I_{n,p} = \int_0^1 t^n (1-t)^p dt.$$

1. Montrer que pour tout n non nul et pour tout p entier,

$$I_{n,p} = \frac{n}{p+1} I_{n-1,p+1}.$$

2. En déduire une expression de $I_{n,p}$ pour tous n et p entiers.

Exercice 12. ●●● Calculer, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx.$

Exercice 13. *Une suite d'intégrales – extrait DS 2020-2021.* ●●○ Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, on note φ_k la fonction

$$\varphi_k : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch}^k(t)} \end{cases}$$

On admet l'existence de $\varphi_k(x)$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$ et pour tout x de $\mathbb{R}$ étant donné que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}^k(t)}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$, pour x fixé.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \varphi_{k+2}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{(k+1)\operatorname{ch}^{k+1}(x)} + \frac{k}{k+1}\varphi_k(x).$$

3. En déduire les valeurs de $\varphi_3(x)$ et $\varphi_4(x)$.

Étude des fonctions φ_k Dans cette partie, k est un entier naturel non nul fixé.

4. Démontrer que φ_k est impaire.
5. On admet la dérivabilité de φ_k . Calculer, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\varphi'_k(x)$ et en déduire le sens de variation de φ_k sur $\mathbb{R}$. En déduire son signe sur $\mathbb{R}$.
6. Démontrer que φ_1 et φ_2 ont des limites en $+\infty$, et les déterminer.
7. En utilisant la question 2., démontrer que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $\varphi_k(x)$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$.

On note, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $I_k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_k(x)$.

8. Toujours en utilisant la question 2., démontrer que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $I_{k+2} = \frac{k}{k+1}I_k$.
9. Soit la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall k \in \mathbb{N}^*, a_k = kI_k I_{k+1}$. Démontrer que $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est constante et préciser la valeur de cette constante.
10. Déterminer, pour tout $k \geq 1$, les valeurs de I_{2k} et I_{2k+1} .

Exercice 14. ●●○ Notre but est de calculer l'intégrale suivante : $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\cos^2(t)}{\cos(2t)} dt$.

1. Montrer que cette intégrale est positive.

On pose $J = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\sin^2(t)}{\cos(2t)} dt$.

2. Calculer $I - J$.
3. Calculer $I + J$.
4. En déduire la valeur de I .

Exercice 15. ●●○ Soit $\omega = a + ib$ un complexe, (a, b réels). Déterminer une primitive de

$$t \mapsto \frac{1}{t - \omega}.$$

Exercice 16. Lemme de Riemann-Lebesgue. ●●● Soient a et b deux réels, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable, de dérivée continue. Montrer que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left| \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt \right| = 0.$$

On pourra effectuer une intégration par parties.

Indications. Pour cette feuille de TD, quelques indications, mais surtout, ensuite, les réponses brutes des calculs d'intégrale !

- 8 Voici des changements de variables à poser :

1. $s = \sqrt{t}$
2. $u = \sqrt{x-1}$
3. $s = e^t$
4. $\theta = \sin(x)$

5. Poser $u = \tan(t/2)$ et remarquer que

$$\frac{1}{1+2u-u^2} = -\frac{1}{(u-1-\sqrt{2})(u-1+\sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{u-1+\sqrt{2}} - \frac{1}{u-1-\sqrt{2}} \right),$$

(passage délicat)

9 Linéariser le produit de sinus.

10 1.

2. Effectuer le changement de variables $y = a + b - x$.

3.

12 Poser $u(x) = x^n$ et $v'(x) = \sqrt{1-x}$.

14 1. Utiliser la propriété du cours qui parle d'intégrales positives.

2. Développer $\cos(2t)$.

3. Poser $s = \tan(t)$.

4. Remarquer que $I = \frac{I - J + I + J}{2}$

15 Utiliser la quantité conjuguée au dénominateur, puis faire apparaître ou bien du $\ln$, ou bien de l'arctangente. **Attention !** Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t+i}$ **n'est pas** $t \mapsto \ln|t+i|$!

16 Effectuer une intégration par parties, avec $u(t) = f(t)$ et $v'(t) = e^{it\lambda}$.

Réponses brutes.

- 6 1. $\frac{175}{6}$
2. $\frac{1}{6} - \frac{1}{6e^{12}}$
3. $-\frac{1}{t}$
4. $2\ln(2)^2$
5. $\ln|\ln(t)|$

6. $\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$
7. $-\frac{1}{8}$
8. 0
9. $\tan(t) - t$

- 7 1. $e^2 + 1$
2. $2(e^t - 1)$
3. $\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln(2)$

4. $x\operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x)$.
5. $x\operatorname{Arcsin}(x) + \sqrt{1-x^2}$.

- 8 1. $\operatorname{Arctan}(\sqrt{e^3-1}) - \operatorname{Arctan}(\sqrt{e-1})$
2. $\frac{\sqrt{y-1}^3}{3} + \sqrt{y-1} - \left(\frac{1}{3} + 1\right)$
3. $2\operatorname{Arctan}(e^y) - 2\operatorname{Arctan}(e)$

4. $\frac{\pi}{8}$
5. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$

10 $\int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx = \frac{\pi^2}{4}$.

12 $I_n = \frac{2n(2n-2) \dots 2}{(2n+3)(2n+1) \dots 5} I_0 = \frac{2^n n!}{(2n+3)(2n+1) \dots 3}$

14 $I = \frac{\pi}{16} + \frac{\ln(2)}{4}$