

DM 04+ Treillis et théorème de Cantor-Bernstein

A. Notion de treillis

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble muni d'une relation d'ordre. On dit que E est un treillis si pour tous x et y de E , l'ensemble $\{x, y\}$ possède une borne supérieure et une borne inférieure. On notera alors $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ et $x \vee y = \sup\{x, y\}$. On remarque qu'alors $x \wedge y = y \wedge x$ et que $x \vee y = y \vee x$. Ainsi, $\mathbb{N}^*$ muni de la relation de divisibilité $|$ est un treillis : si a et b sont dans $\mathbb{N}^*$, $a \wedge b$ est le pgcd de a et b et $a \vee b$ leur ppcm.

1. Montrer que si la relation $\preceq$ sur E est totale, alors $(E, \preceq)$ est un treillis.

Correction

Si la relation d'ordre est totale, et si x et y sont dans E , alors $x \preceq y$ et $y \preceq x$, donc $\{x, y\}$ possède un plus petit et un plus grand élément, donc une borne inférieure et une borne supérieure. Donc E est un treillis.

2. $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est-il un treillis ? Si oui, le justifier en précisant, pour A et B dans $\mathcal{P}(E)$, $A \wedge B$ et $A \vee B$.

Correction

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{P}(E)$. Alors $A \cup B = \sup(A, B)$ (en effet, c'est un majorant de A et B et si C est un majorant de A et B , alors il contient A et B , donc il contient $A \cup B$). Donc $A \vee B = A \cup B$. De même, $A \wedge B = A \cap B$.

Un treillis est dit **borné** s'il admet un plus petit élément, noté 0 , et un plus grand élément, noté 1 .

Un treillis $(E, \preceq)$ est dit **complémenté** si pour tout x dans E , il existe un élément x' dans E , appelé **un** complémentaire de x dans E , tel que $x \wedge x' = 0$ et $x \vee x' = 1$.

Un treillis $(E, \preceq)$ est dit **distributif** si pour tous x, y et z de E ,

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \text{ et } x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

(autrement dit $\wedge$ est distributive sur $\vee$ et $\vee$ est distributive sur $\wedge$)

3. Montrer que $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est un treillis complémenté distributif borné.

Correction

$(\mathcal{P}(E), \subset)$ est un treillis. On sait que $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $\emptyset \subset A$ donc $\emptyset$ est le plus petit élément de E . De même, $A \subset E$ donc E est le plus grand élément de $\mathcal{P}(E)$. Donc le treillis est borné.

Si $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B = \overline{A}$, alors $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$ donc le treillis est complémenté. Enfin, il est distributif par distributivité de la réunion sur l'intersection et de l'intersection sur la réunion.

4. Soit $(E, \preceq)$ un treillis borné, complémenté, distributif.

(a) Soit x dans E . Que vaut $x \wedge 0$, $x \vee 0$, $x \wedge 1$, $x \vee 1$?

Correction

0 est le plus petit élément de E donc $x \wedge 0 = 0$ et $x \vee 0 = x$. De même, 1 est le plus grand élément de E donc $x \wedge 1 = x$ et $x \vee 1 = 1$.

(b) Montrer que $\wedge$ est associatif, i.e.

$$\forall (x, y, z) \in E^3, x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z.$$

De même, on peut montrer que $\vee$ est associatif.

Correction

Soient x, y et z dans E . Posons $a = x \wedge (y \wedge z) = \inf(x, \inf(y, z))$ et $b = (x \wedge y) \wedge z$. Par définition de a , $a \preceq x$ et $a \preceq y \wedge z = \inf(y, z)$. Or $y \wedge z \preceq y$ et $y \wedge z \preceq z$, donc $a \preceq y$ et $a \preceq z$. Donc $a \preceq x$ et $a \preceq y$, i.e. a est un minorant de $\{x, y\}$ donc $a \preceq x \wedge y$ par définition de la borne inférieure. Donc $a \preceq x \wedge y$ et $a \preceq z$ donc, par définition de la borne inférieure, $a \preceq (x \wedge y) \wedge z = b$. Par le même type de raisonnement $b \preceq a$. Donc $a = b$.

(c) Si x est dans E , montrer qu'il y a unicité du complémentaire de x . (prendre x' et x'' deux complémentaires de x dans E , considérer $y = x' \wedge (x \vee x'')$). On notera alors **le** complémentaire de x dans E $\bar{x}$.

Correction

Soit x dans E , soient x' et x'' deux complémentaires de x . Soit $y = x' \wedge (x \vee x'')$. Alors $y = x' \wedge 1 = x'$. De même, par associativité, $y = (x' \wedge x) \vee x'' = 0 \vee x'' = x''$. Donc $x' = x''$.

(d) Montrer alors les lois de Morgan :

$$\forall (x, y) \in E^2, \overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y} \text{ et } \overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}.$$

Correction

Soient x et y dans E Alors (comme on a de l'associativité, on écrira $a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b \wedge c$).

$$\begin{aligned} (x \wedge y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) &= ((x \wedge y) \wedge \bar{x}) \vee ((x \wedge y) \wedge \bar{y}) \\ &= (x \wedge y \wedge \bar{x}) \vee (x \wedge y \wedge \bar{y}) \\ &= (y \wedge x \wedge \bar{x}) \vee (x \wedge 0) \\ &= (y \wedge 0) \vee 0 = 0 \vee 0 = 0. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} (x \wedge y) \vee (\bar{x} \vee \bar{y}) &= (x \vee \bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (y \vee \bar{x} \vee \bar{y}) \\ &= (1 \vee \bar{y}) \wedge (1 \vee \bar{x}) = 1 \wedge 1 = 1. \end{aligned}$$

D'où le résultat. On admet la deuxième loi de Morgan parce que bon...voilà...

5. Montrer par récurrence sur le nombre d'éléments que toute partie finie d'un treillis est bornée (attention, ici « bornée » est à prendre au sens de « partie bornée » comme dans le cours).

Correction

Montrons par récurrence sur n que toute partie à n éléments admet un majorant et un minorant.

L'initialisation est évidente car toute partie à 1 élément est bornée par cet élément.

Ensuite, on suppose que pour un certain n , toute partie à n éléments admet un sup et un inf. Soit A une partie à $n + 1$ éléments. Soit $x \in A$. Alors $A \setminus \{x\}$ possède n éléments, donc A admet une majorant M et un minorant m . Maintenant, $\{x, M\}$ est une partie à deux éléments d'un treillis, donc il admet une borne supérieure $x \vee M$. De même, $\{m, x\}$ admet une borne inférieure $m \wedge x$. Donc A est majorée par $M \vee x$ et est minorée par $m \wedge x$. D'où l'hérédité.

D'où le résultat par récurrence !

Dernière définition, un treillis est dit **complet** (attention, rien à voir avec « complété ») si toute partie de ce treillis admet une borne supérieure.

6. Démontrer que si E est un treillis complet, alors il possède un plus grand et un plus petit élément.

Correction

J'ai rajouté cette question pour mieux éclairer le problème. Si E est un treillis complet,

- E admet une borne supérieure. Cette borne supérieure appartenant à E , il s'agit du plus grand élément de E .
- $\emptyset$ admet une borne supérieure, donc l'ensemble de ses majorants admet un plus petit élément. Or, tout élément de E est un majorant de $\emptyset$ (la proposition $\forall x \in \emptyset, \dots$ étant toujours vraie), donc E est l'ensemble des majorants de $\emptyset$, et admet donc un plus petit élément.

7. Démontrer que si E est un treillis complet, alors toute partie de E admet une borne inférieure.

Correction

Soit E un treillis complet, A une partie de E . Soit B l'ensemble des minorants de E . Alors B admet une borne supérieure par la propriété de complétude du treillis. Nommons-la μ .

On va démontrer que $\mu = \inf(A)$.

- déjà, μ est un minorant de A : soit $x \in A$. Alors x est un majorant de B car B est l'ensemble des minorants de A . Donc $\mu \leq x$ car μ est le plus petit des majorants de B .

Donc μ est un minorant de A .

- ensuite, si m est un autre minorant de A , alors $m \in B$. Donc, comme μ est un majorant de B , $\mu \geq m$.

Donc μ est le plus grand des minorants de A , donc $\mu = \inf(A)$.

8. Démontrer que $(\mathbb{Q} \cap [0, 2], \leq)$ est un treillis borné mais qu'il n'est pas complet. *Cela montre que le caractère complet est + fort que le caractère borné !*

Correction

Comme l'ordre $\leq$ est total, $(\mathbb{Q} \cap [0, 2], \leq)$ est un treillis, clairement borné. Montrons qu'il n'est pas complet.

Soit $A = \mathbb{Q} \cap [0, \sqrt{2}]$. A est une partie de $\mathbb{Q} \cap [0, 2]$. Montrons que A n'admet pas de borne supérieure.

Supposons, par l'absurde, que A en admette une : soit m cette borne supérieure. Alors m est rationnel. Donc $m \neq \sqrt{2}$.

- si $m < \sqrt{2}$, notons $\varepsilon = \sqrt{2} - m > 0$. Soit a un rationnel tel que $0 < a < \varepsilon$ (il suffit de prendre $a = \frac{1}{10^n}$ pour n assez grand). Donc $m + a$ est un rationnel de $[0, \sqrt{2}]$ et $m + a > m$, absurde !
- si $m > \sqrt{2}$, notons $\varepsilon = -\sqrt{2} + m > 0$. Soit a un rationnel tel que $0 < a < \varepsilon$ (il suffit de prendre $a = \frac{1}{10^n}$ pour n assez grand). Donc $m - a$ est supérieur à tous les éléments de $\mathbb{Q} \cap [0, \sqrt{2}]$.

On conclut que A n'a pas de borne supérieure !

Donc $\mathbb{Q} \cap [0, 2]$ n'est pas complet.

9. Justifier que $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est un treillis complet. (on précisera, si $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathcal{P}(E)$, la borne supérieure et la borne inférieure de $\mathcal{A}$).

Correction

Si $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathcal{P}(E)$,

$$\bigcup_{F \in \mathcal{A}} F = \sup(\mathcal{A}) \text{ et } \bigcap_{F \in \mathcal{A}} F = \inf(\mathcal{A}).$$

B. Théorème de Knaster-Tarski

Soit $(T, \preceq)$ un treillis complet, f une application croissante de T dans T . On veut montrer que f admet un point fixe (théorème de Knaster-Tarski).

Soit $S = \{x \in T, f(x) \preceq x\}$.

10. Justifier que S admet une borne inférieure m .

Correction

S est une partie de T , treillis complet, donc S admet une borne inférieure.

11. Démontrer que $f(m) = m$.

Correction

- $m = \inf(S)$ donc pour tout x dans S , $m \preceq x$. Donc $f(m) \preceq f(x)$ par croissance de f , donc $f(m) \preceq x$ car $x \in S$. Mais comme m est le plus grand des minorants de S et que $f(m)$ est un minorant de S , $f(m) \preceq m$.
- mais par croissance de f , $f(f(m)) \preceq f(m)$, donc $f(m) \in S$. Mais comme m est un minorant de S , $m \preceq f(m)$.

Par antisymétrie de la relation d'ordre, $f(m) = m$.

12. Démontrer qu'en fait, l'ensemble $\{x \in T, f(x) = x\}$ est un treillis complet.

Correction

Déjà, cet ensemble (notons-le U) est non vide. Ensuite, si A est une partie de U , on considère $S_A = \{x \in T, x \text{ majore } A \text{ et } f(x) \preceq x\}$.

Alors cette partie admet une borne inférieure m . Montrons que $m = \sup(A)$.

- si $a \in A$, alors a minore S_A . Donc, comme $m = \inf(S_A)$, $a \preceq m$.
- ensuite, on montre que $f(m) = m$ par la même méthode que précédemment.

Donc, si b est un majorant de A (dans U), alors $b \in S_A$, donc $m \preceq b$.

Donc $m = \sup(A)$.

C. Application au théorème de Cantor-Bernstein

On applique dans cette partie le théorème de Knaster-Tarski à une preuve du théorème de Cantor-Bernstein. Soient E et F deux ensembles, tels qu'il existe une injection f de E dans F et une injection g de F dans E . On veut montrer qu'il existe une bijection de E dans F .

On définit l'application $\Psi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ par

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \Psi(A) = E \setminus g(F \setminus f(A)).$$

13. Démontrer que Ψ est **croissante** de $(\mathcal{P}(E), \subset)$ dans $(\mathcal{P}(E), \subset)$.

Correction

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{P}(E)$ tels que $A \subset B$.

Alors $f(A) \subset f(B)$.

Donc $F \setminus f(B) \subset F \setminus f(A)$.

Donc $g(F \setminus f(B)) \subset g(F \setminus f(A))$.

Donc $\Psi(A) \subset \Psi(B)$.

14. En déduire qu'il existe $M \subset E$ tel que $\Psi(M) = M$.

Correction

Comme $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est un treillis complet et que Ψ est croissante sur ce treillis, il existe, par le théorème de Knaster-Tarski, $M \subset E$ tel que $\Psi(M) = M$.

15. Si $N = F \setminus f(M)$, démontrer que $g(N) = E \setminus M$.

Correction

On sait que $E \setminus g(N) = M$ donc $g(N) = E \setminus M$.

On définit alors

$$\alpha : \begin{cases} M \rightarrow f(M) \\ x \mapsto f(x) \end{cases}, \beta : \begin{cases} F \setminus f(M) \rightarrow E \setminus M \\ x \mapsto g(x) \end{cases}$$

16. Démontrer que α et β sont bijectives.

Correction

- α :
 - soient x et x' tels que $\alpha(x) = \alpha(x')$. Alors $f(x) = f(x')$ donc par injectivité de f , $x = x'$.
 - soit y dans $f(M)$. Alors on dispose de x dans M tel que $y = f(x)$.D'où la bijectivité de α .
- β :
 - l'injectivité est aussi évidente.
 - la surjectivité vient du fait que $E \setminus M = g(F \setminus f(M))$.

17. Démontrer alors qu'il existe une bijection h de E dans F .

Correction

Il suffit alors de poser

$$h : x \mapsto \begin{cases} \alpha(x) & \text{si } x \in M \\ \beta^{-1}(x) & \text{si } x \in E \setminus M. \end{cases}$$