

DM 04

à rendre le lundi 13 octobre

Formules

1. Formule 1 : Problème 1 (questions 1 à 12) + exercices 1 et 2 du problème 2. Temps conseillé : 2h + 1h.
2. Formule 2 : Problème 1 + exercices 2 et 3 du problème 2. Temps conseillé : 2h + 2h30.
3. Bonus : Problème 3, un joli problème sur une fonction permettant de dénombrer les rationnels ! Pour ce problème seul, 3h seront nécessaires.
Possibilité de rendre ce problème bonus pendant les vacances, par mail.

Problème 1. Étude du gudermannien

On définit, pour tout t dans $\mathbb{R}$, le *gudermannien* de t , noté $\text{gd}(t)$, par $\text{gd}(t) = 2\text{Arctan}(e^t) - \frac{\pi}{2}$.

A. Étude de fonction

1. Tracer le graphe de la fonction Arctan . Préciser la valeur en 0, les asymptotes éventuelles.

Correction

C'est du cours !

2. Démontrer que pour tout t dans $\mathbb{R}$, $-\frac{\pi}{2} < \text{gd}(t) < \frac{\pi}{2}$.

Correction

Soit t dans $\mathbb{R}$. Alors $0 < e^t$ donc

$$0 < \text{Arctan}(t) < \frac{\pi}{2},$$

donc

$$0 < 2\text{arctan}(t) < \pi,$$

donc

$$-\frac{\pi}{2} < \text{gd}(t) < \frac{\pi}{2}$$

3. Déterminer le signe de gd sur $\mathbb{R}$, puis son ensemble de dérivabilité, sa dérivée et ses variations. Préciser $\text{gd}(0)$ et l'équation de la tangente à la courbe de gd en 0.

Correction

- (Attention à l'utilisation de $\Leftrightarrow$!)

Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \text{gd}(t) > 0 &\Leftrightarrow 2\text{Arctan}(e^t) - \frac{\pi}{2} > 0 \\ &\Leftrightarrow 2\text{Arctan}(e^t) > \frac{\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow \text{Arctan}(e^t) > \frac{\pi}{4} \\ &\Leftrightarrow e^t > 1 \\ &\Leftrightarrow t > 0 \end{aligned}$$

Donc gd est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et négative sur $\mathbb{R}_-^*$.

- Ensuite, Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc gd est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout t dans $\mathbb{R}$,

$$\text{gd}'(t) = \frac{2}{1+(e^t)^2} e^t = \frac{2e^t}{1+e^{2t}} = \frac{2}{e^{-t}+e^t} = \frac{1}{\text{ch}(t)} > 0.$$

On en déduit que gd est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- Enfin, on calcule $\text{gd}(0) = 0$ et $\text{gd}'(0) = 1$, donc la tangente à la courbe de gd en 0 est la droite d'équation $y = x$.

4. Déterminer les limites de gd en $\pm\infty$.

Correction

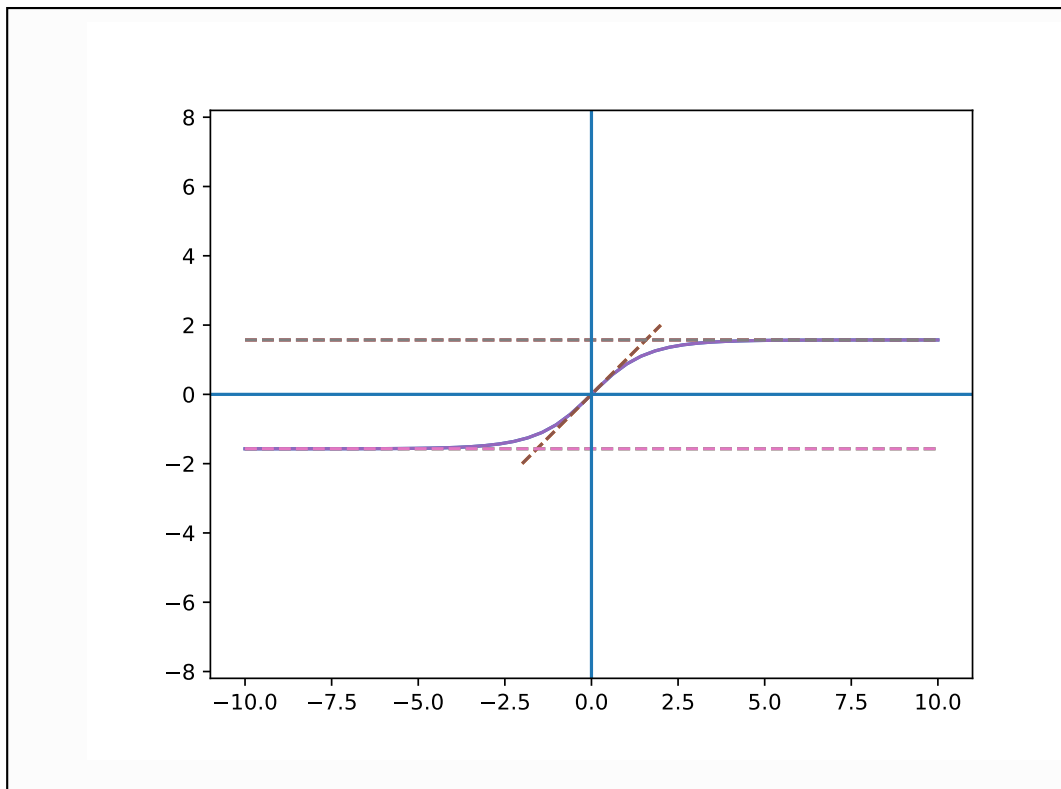
On sait que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{gd}(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\text{Arctan}(x) - \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$.

De même, $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{gd}(t) = \lim_{x \rightarrow 0} 2\text{Arctan}(x) - \frac{\pi}{2} = \boxed{-\frac{\pi}{2}}$.

5. Tracer le graphe de gd .

Correction

On en déduit le joli graphe suivant :



B. Quelques identités

6. Démontrer que pour tout t dans $\mathbb{R}$, $\tan(\operatorname{gd}(t))$ est définie et est égale à $\operatorname{sh}(t)$.

Correction

Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors en posant $\theta = \operatorname{Arctan}(e^t)$, on sait que $2\theta - \frac{\pi}{2} \in D$ et

$$\begin{aligned} \tan\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right)} \\ &= \frac{-\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)} \\ &= -\frac{1}{\tan(2\theta)} \\ &= -\frac{1 - \tan^2(\theta)}{2 \tan(\theta)} \\ &= -\frac{1 - \tan^2(\operatorname{Arctan}(e^t))}{2 \tan(\operatorname{Arctan}(e^t))} \\ &= -\frac{1 - e^{2t}}{2e^t} = -\frac{e^{-t} - e^t}{2} = \operatorname{sh}(t) \end{aligned}$$

Donc

7. Démontrer les deux autres identités suivantes : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\operatorname{gd}(t)) = \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \text{ et } \sin(\operatorname{gd}(t)) = \operatorname{th}(t).$$

Correction

Soit t dans $\mathbb{R}$. Alors

$$1 + \tan(\operatorname{gd}(t))^2 = \frac{1}{\cos(\operatorname{gd}(t))^2},$$

donc

$$\cos(\operatorname{gd}(t))^2 = \frac{1}{1 + \tan(\operatorname{gd}(t))^2} = \frac{1}{1 + \operatorname{sh}(t)^2} = \frac{1}{\operatorname{ch}(t)^2}.$$

Or, $\operatorname{gd}(t) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ donc $\cos(\operatorname{gd}(t)) \geq 0$, donc

$$\cos(\operatorname{gd}(t)) = \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}.$$

On en déduit que

$$\sin(\operatorname{gd}(t)) = \tan(\operatorname{gd}(t)) \cos(\operatorname{gd}(t)) = \operatorname{sh}(t) \times \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} = \operatorname{th}(t).$$

C. Fonction réciproque de gd

8. Soit a dans $] -1, 1[$. Résoudre l'équation $\operatorname{th}(x) = a$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Correction

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \operatorname{th}(x) = a &\Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = a \\ &\Leftrightarrow \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = a \text{ en factorisant par } e^{-x} \\ &\Leftrightarrow e^{2x} - 1 = ae^{2x} + a \\ &\Leftrightarrow e^{2x}(1 - a) = 1 + a \\ &\Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1 + a}{1 - a} \text{ car } a \neq 1 \\ &\Leftrightarrow 2x = \ln \left(\frac{1 + a}{1 - a} \right) \text{ car } \frac{1 + a}{1 - a} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + a}{1 - a} \right). \end{aligned}$$

9. Démontrer que la fonction gd est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ et préciser l'expression de sa bijection réciproque. On la nomme « arc gudermannien » et on la note aragd .

Correction

Soit θ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Soit x dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \text{gd}(x) = \theta &\Leftrightarrow 2\text{Arctan}(e^t) = \theta + \frac{\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow \text{Arctan}(e^t) = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \\ &\Leftrightarrow e^t = \tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{CAR } \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\ &\Leftrightarrow t = \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \quad \text{CAR } \tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) > 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \exists ! x \in \mathbb{R}, \text{gd}(x) = \theta.$$

Donc gd est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et

$$\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \text{gd}^{-1}(\theta) = \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

10. Démontrer que pour tout θ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\text{arctgd}(\theta) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \sin(\theta)}{1 - \sin(\theta)}\right)$.

Correction

On ne va pas partir de l'expression trouvée précédemment ! Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $t \in \mathbb{R}$.

Alors, comme $\text{gd}(\theta) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

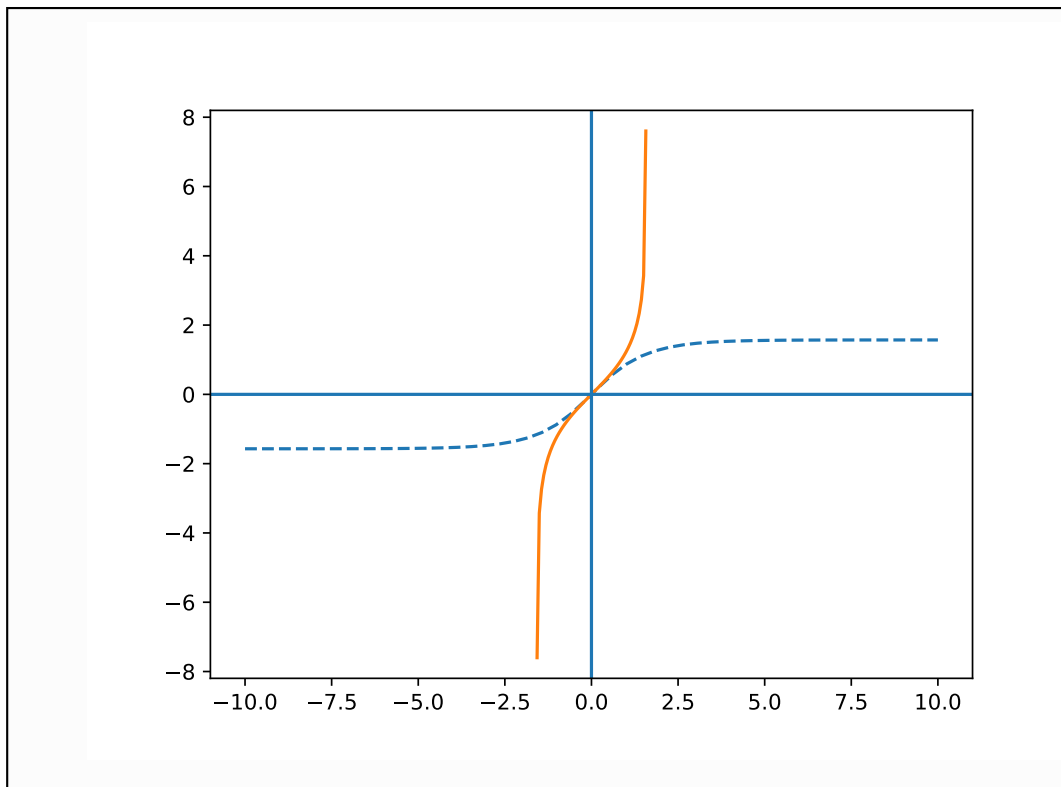
$$\text{gd}(t) = \theta \Leftrightarrow \sin(\text{gd}(t)) = \sin(\theta) \Leftrightarrow \text{th}(t) = \sin(\theta) \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \sin(\theta)}{1 - \sin(\theta)}\right)$$

par la question 8..

11. Représenter les courbes de gd et arctgd sur un même graphe. On précisera les valeurs en 0 et les asymptotes éventuelles.

Correction

On obtient alors le graphe suivant :



12. Démontrer que arctgd est dérivable en tout point de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et exprimer sa dérivée simplement à l'aide de fonctions usuelles.

Correction

On remarque que gd' ne s'annule en aucun point de $\mathbb{R}$, donc arctgd est dérivable en tout point de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et, si $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\text{arctgd}'(\theta) = \frac{1}{\text{gd}'(\text{arctgd}(\theta))} = \frac{1}{\cos(\text{gd}(\text{arctgd}(\theta)))} = \frac{1}{\cos(\theta)}.$$

13. Démontrer que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note sa bijection réciproque Argsh . On admettra que th est une bijection de $] -1, 1[$ dans $\mathbb{R}$ et on notera sa bijection réciproque Argth .

Correction

La fonction sh est continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante, $\text{sh}(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$ et $\text{sh}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ donc, d'après le théorème de la bijection sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

14. Démontrer que pour tout x dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\text{arctgd}(x) = \text{Argsh}(\tan(x)) = \text{Argth}(\sin(x)) = 2\text{Argth}\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

Correction

Soit x dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Notons $t = \operatorname{arccgd}(x)$. On sait alors que

$$\tan(\operatorname{gd}(t)) = \operatorname{sh}(t) \text{ et } \sin(\operatorname{gd}(t)) = \operatorname{th}(t),$$

donc, comme $\operatorname{gd}(\operatorname{arccgd}(x)) = x$,

$$\tan(x) = \operatorname{sh}(\operatorname{arccgd}(x)) \text{ et } \sin(x) = \operatorname{th}(\operatorname{arccgd}(x)),$$

d'où, comme sh et th sont des bijections,

$$\operatorname{arccgd}(x) = \operatorname{Argsh}(\tan(x)) = \operatorname{Argth}(\sin(x)).$$

Pour la dernière égalité, on va calculer $\operatorname{th}(2\operatorname{Argth}(\tan(x/2)))$.

Si $a \in \mathbb{R}$. Calculons

$$\begin{aligned} \operatorname{th}(2a) &= \frac{e^{2a} - e^{-2a}}{e^{2a} + e^{-2a}} = \frac{(e^a - e^{-a})(e^a + e^{-a})}{e^{2a} + e^{-2a}} = \frac{\operatorname{th}(a)(e^a + e^{-a})^2}{e^{2a} + e^{-2a}} \\ &= \frac{\operatorname{th}(a)}{\frac{e^{2a} + e^{-2a}}{(e^a + e^{-a})^2}} = \frac{\operatorname{th}(a)}{\frac{e^{2a} + e^{-2a}}{e^{2a} + 2 + e^{-2a}}} = \frac{\operatorname{th}(a)}{1 - \frac{2}{(e^a + e^{-a})^2}} \\ &= \frac{\operatorname{th}(a)}{1 - \frac{1}{2\operatorname{ch}^2(a)}} = \frac{\operatorname{th}(a)}{1 - \frac{1}{2}(1 - \operatorname{th}^2(a))} = \frac{\operatorname{th}(a)}{\frac{1}{2}(1 + \operatorname{th}^2(a))} = \frac{2\operatorname{th}(a)}{1 + \operatorname{th}^2(a)} \end{aligned}$$

...au brouillon...

Remarque, au brouillon, on sait que $\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$. Vu qu'il n'y a que des différences de signes dans les formules hyperboliques, on pouvait directement essayer de montrer que $\operatorname{th}(2a) = \frac{2\operatorname{th}(a)}{1 + \operatorname{th}^2(a)}$.

Donc

$$\begin{aligned} \operatorname{th}(2\operatorname{Argth}(\tan(x/2))) &= \frac{2\operatorname{th}(\operatorname{Argth}(\tan(x/2)))}{1 + \operatorname{th}(\operatorname{Argth}(\tan(x/2)))^2} \\ &= \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sin(x), \end{aligned}$$

par les formules d'arc moitié. Donc $\operatorname{th}(2\operatorname{Argth}(\tan(x/2))) = \sin(x)$, donc

$$\operatorname{arccgd}(x) = \operatorname{Argth}(\sin(x)) = 2\operatorname{Argth}(\tan(x/2)).$$

Problème 2. Exercices sur les applications

Exercice 1. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^* \\ z \mapsto e^z \end{cases}$.

1. f est-elle injective ? surjective ?

Correction

C'est du cours !

2. Déterminer $f(i\mathbb{R})$ et $f^{-1}(i\mathbb{R})$.

Correction

Déjà, $i\mathbb{R} = \{ia, a \in \mathbb{R}\}$. Ainsi,

$$f(i\mathbb{R}) = \{e^z, z \in i\mathbb{R}\} = \{e^{ia}, a \in \mathbb{R}\} = \mathbb{U},$$

la dernière égalité venant du fait que si $a \in \mathbb{R}$, $|e^{ia}| = 1$ et que si $z \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.

Ensuite, soit $z \in \mathbb{C}$. $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $z = x + iy$. Alors on a les équivalences

$$\begin{aligned} z \in f^{-1}(i\mathbb{R}) &\Leftrightarrow f(z) \in i\mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \arg(e^{x+iy}) = 0 \\ &\Leftrightarrow y \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f^{-1}(z) = \left\{ x + iy, x \in \mathbb{R}, y \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \right\}.$$

Exercice 2. On note, si $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^\alpha \end{cases}$.

Soit E l'ensemble des fonctions puissances : $E = \{f_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Soient

$$\varphi : \begin{cases} E \rightarrow E \\ f \mapsto f \times f \end{cases} \text{ et } \psi : \begin{cases} E \rightarrow E \\ f \mapsto f \circ f \end{cases}$$

1. Vérifier que φ et ψ sont à valeurs dans E .
2. φ et ψ sont-elles bijectives ? Si oui, donner leur bijection réciproque.

Exercice 3. Soient E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$. On considère l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(F) \\ A \mapsto f(A) \end{cases},$$

où $f(A)$ désigne l'image directe de A par f . On considère l'application

$$\psi : \begin{cases} \mathcal{P}(F) \rightarrow \mathcal{P}(E) \\ B \mapsto f^{-1}(B) \end{cases},$$

où $f^{-1}(B)$ désigne l'image réciproque de B par f .

1. Soient A dans $\mathcal{P}(E)$ et B dans $\mathcal{P}(F)$. Rappeler les définitions de $f(A)$ et $f^{-1}(B)$.

Correction

C'est du cours !

2. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) f est injective

- (ii) φ est injective
(iii) ψ est surjective

Correction

Tout est possible ici.

(a) Raisonnement par implications circulaires.

- Supposons (i), et montrons que φ est injective.
Soient A et A' dans $\mathcal{P}(E)$ tels que $\varphi(A) = \varphi(A')$. Montrons que $A = A'$.
Soit $x \in A$. Alors $f(x) \in \varphi(A) = \varphi(A')$, donc on dispose de $x' \in A'$ tel que $f(x) = f(x')$. Ainsi, par injectivité de f , $x = x'$.
Donc $x \in A'$, d'où $A \subset A'$.
L'inclusion réciproque se démontrant de la même manière, on en déduit l'égalité.
- Supposons (ii) et montrons que ψ est surjective.
Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, cherchons $B \in \mathcal{P}(F)$ tel que $A = \psi(B) = f^{-1}(B)$.
Posons $B = \varphi(A)$, et démontrons que $\psi(B) = A$.
Si nous voulons utiliser l'injectivité de φ , il faut trouver deux parties de E qui ont même image par φ ...
Démontrons que $\varphi(\psi(B)) = \varphi(A)$, i.e. $f(f^{-1}(f(A))) = f(A)$. pour pouvoir conclure !

— déjà, $A \subset f^{-1}(f(A))$ donc $f(A) \subset f(f^{-1}(f(A)))$.
— Ensuite, on sait que $f(f^{-1}(C)) \subset C$ pour toute C dans $\mathcal{P}(F)$. En prenant $C = f(A)$, on a le résultat.
Ainsi, $\varphi(\psi(B)) = \varphi(A)$. Par injectivité de φ , $\psi(B) = A$.
- Supposons (iii) et montrons que f est injective. Soient x et x' dans E tels que $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$.
Par surjectivité de ψ , on dispose de B dans $\mathcal{P}(F)$ et B' dans $\mathcal{P}(F)$ tels que $\psi(B) = \{x\}$ et $\psi(B') = \{x'\}$.
Mais $f(x) = f(x')$ donc $f(x) \in B \cap B'$. Ainsi, $x \in f^{-1}(B)$ et $x \in f^{-1}(B')$.
Donc $x \in \psi(B') = \{x'\}$. Donc $x = x'$. D'où l'injectivité de f !

(b) Méthode par double équivalence.

- — Supposons (i), et montrons que φ est injective : **déjà fait plus haut.**
— Supposons (ii), et montrons que f est injective. Soient x et x' tels que $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$.
Posons $A = \{x\}$, $A' = \{x'\}$. Alors, comme $f(x) = f(x')$, $f(A) = f(A')$ donc $\varphi(A) = \varphi(A')$, donc $A = A'$, c'est-à-dire que $x = x'$. Donc f est injective.
- — Supposons (i) et montrons que ψ est surjective. Soit $A \subset E$. Cherchons B tel que $A = \psi(B) = f^{-1}(B)$.
Posons $B = f(A)$. Alors, si on refait exactement comme dans l'exercice 3 du TD (**vous devez le refaire, ça n'est pas une propriété du cours !**), comme f est injective, $f^{-1}(B) = f^{-1}(f(A)) = A$. Donc $\psi(B) = A$.
Donc ψ est surjective.
- Supposons (iii) et démontrons que f est injective : **déjà fait.**

3. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est surjective
- (ii) φ est surjective
- (iii) ψ est injective

Correction

Idem, choix entre deux méthodes. Je ne vais en présenter qu'une.

- Supposons (i) et démontrons que φ est surjective. Soit $B \in \mathcal{P}(F)$. Posons $A = f^{-1}(B)$. Alors, si on refait exactement comme dans l'exercice 3 du TD (**vous devez le refaire, ça n'est pas une propriété du cours !**), comme f est surjective, $f(f^{-1}(B)) = B$, donc $\varphi(A) = B$.
Donc φ est surjective.
- Supposons (ii) et démontrons que ψ est injective. Soient B et B' deux parties de F telles que $\psi(B) = \psi(B')$. Alors $f^{-1}(B) = f^{-1}(B')$.
Par surjectivité de φ , on dispose de A et de A' des parties de E telles que $B = f(A)$ et $B' = f(A')$.
Soit $y \in B$. Alors on dispose de $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Ainsi, $x \in f^{-1}(B) = f^{-1}(B')$. Par conséquent, $y \in B'$.
De même, on montre que $B' \subset B$.
D'où l'inclusion réciproque et l'égalité !
- Supposons (iii) et démontrons que f est surjective. Soit $y \in F$. Alors $\{y\} \neq \emptyset$ donc, par injectivité de ψ , $f^{-1}(\{y\}) \neq f^{-1}(\emptyset)$, ce qui signifie que $f^{-1}(\{y\})$ n'est pas vide ! Ainsi on dispose d'un élément x dans $f^{-1}(\{y\})$, i.e. d'un antécédent de y par f !

Problème 3. Questions de dénombrabilité

Soit A un ensemble. On dit que A est **dénombrable** s'il existe une bijection φ de $\mathbb{N}$ dans A . Ce problème étudie, via 3 parties indépendantes, cette notion.

A. Quelques exemples

1. Démontrer que $\mathbb{N}^*$ est dénombrable. Démontrer que l'ensemble des entiers pairs, noté $2\mathbb{N}$, est dénombrable. *On explicitera des bijections ; pour montrer qu'il s'agit de bijections, il suffira d'en donner la bijection réciproque, sans faire toutes les vérifications nécessaires.*

Correction

Posons $f : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^* \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$. Alors f est bijective, de bijection réciproque $g : \begin{cases} \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto n-1 \end{cases}$.
Donc $\mathbb{N}^*$ est dénombrable.
De même, posons $h : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \end{cases}$. Alors h est bijective, de réciproque $i : \begin{cases} 2\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ p \mapsto p/2 \end{cases}$.
($p/2 \in \mathbb{N}$ si $p \in 2\mathbb{N}$).
Ainsi, $\mathbb{N}^*$ et $2\mathbb{N}$ sont dénombrables.

2. Démontrer **proprement** que $\varphi : \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0 \\ -2n-1 & \text{si } n < 0 \end{cases} \end{cases}$ est une bijection de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$.
En déduire la dénombrabilité de $\mathbb{Z}$.

Correction

Encore une fois, exhibons une bijection réciproque. Posons

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \\ n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{cases}$$

Soit alors $n \in \mathbb{N}$.

- si n est pair, $n = 2p$, $\varphi(\psi(n)) = g(p) = 2p = n$ (car $p \geq 0$)
- si n est impair, $n = 2p+1$, $\varphi(\psi(n)) = g(-(p+1)) = -2(-(p+1)) - 1 = 2p+2-1 = 2p+1 = n$.

Ainsi, $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{\mathbb{N}}$.

Soit ensuite $n \in \mathbb{Z}$.

- si $n \geq 0$, $\psi(\varphi(n)) = \psi(2n) = n$.
- si $n < 0$, $\psi(\varphi(n)) = \psi(-2n-1) = -\frac{-2n-1+1}{2} = n$.

Ainsi, $\psi \circ \varphi = \text{Id}_{\mathbb{Z}}$.

Donc φ est bien bijective, donc $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

3. On démontre ici que l'ensemble des suites dont les termes sont des « 0 » ou des « 1 », $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable. On suppose qu'il existe $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, bijective. Construire une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout n , $u_n \neq \psi(n)(n)$, et conclure.

Cette question peut être passée sans problème.

Correction

On utilise ici le **procédé diagonal de Cantor**. Définissons $\mathbf{u} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - \psi(n)(n).$$

Alors $\mathbf{u} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ mais si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u} \neq \psi(n)$: en effet, ces deux suites diffèrent par leur n -ième terme. Ainsi, $\mathbf{u}$ n'a pas d'antécédent par ψ , donc ψ n'est pas surjective !

B. $\mathbb{Q}$ est dénombrable

B-I. Étude de la fonction de Calkin-Wilf

Si x est un réel, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand entier k inférieur ou égal à x . On note $\{x\}$ sa partie fractionnaire : $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

4. Démontrer que la fonction $x \mapsto \{x\}$ est 1-périodique, à valeurs dans $[0, 1[$ et donner l'allure de sa courbe.

Correction

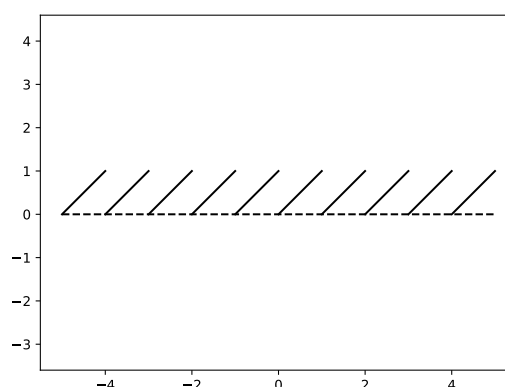
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$, donc $x < \lfloor x \rfloor + 1 \leq x + 1$. Par caractérisation de la partie entière,

$$\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1.$$

Ainsi,

$$\{x + 1\} = (x + 1) - \lfloor x + 1 \rfloor = x + 1 - (\lfloor x \rfloor + 1) = x - \lfloor x \rfloor = \{x\}$$

Donc $x \mapsto \{x\}$ est 1-périodique. De plus, si $x \in [0, 1[$, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor = x$. D'où le graphe suivant



5. Démontrer que pour tout $x \geq 0$, $\lfloor x \rfloor + 1 - \{x\} > 0$.

Correction

Soit $x \geq 0$. Alors $\{x\} < 1$, donc $1 - \{x\} > 0$. De plus $\lfloor x \rfloor \geq 0$ donc $\lfloor x \rfloor + 1 - \{x\} > 0$.

On définit alors la fonction de Calkin-Wilf, notée f (et bien définie, par la question précédente), par

$$f : \begin{cases} [0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[\\ x \mapsto \frac{1}{\lfloor x \rfloor + 1 - \{x\}} \end{cases}.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'expression exacte de f sur $[n, n+1[$, ainsi que ses variations. Préciser la valeur en n et la limite à gauche en $n+1$.

Correction

Soit $x \in [n, n+1[$. Alors $\lfloor x \rfloor = n$, donc

$$f(x) = \frac{1}{n+1-(x-n)} = \frac{1}{2n+1-x}.$$

Ainsi, f est strictement croissante sur $[n, n+1[$. Elle est définie en n et vaut $\frac{1}{n+1}$. Ensuite,

- si $n = 0$, alors $\frac{1}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$.
- si $n > 0$, alors $\frac{1}{2n+1-x} \xrightarrow{x \rightarrow n+1^-} \frac{1}{n}$.

7. Démontrer que, pour tout $x > 1$, $f(x) \leq \frac{1}{x-1}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Correction

Soit $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$. Alors $\lfloor x \rfloor \geq x-1$, $-\{x\} \geq -1$, donc $\lfloor x \rfloor + 1 - \{x\} \geq x-1+1-1 = x-1$, donc $f(x) \leq \frac{1}{x-1}$. Comme f est toujours positive,

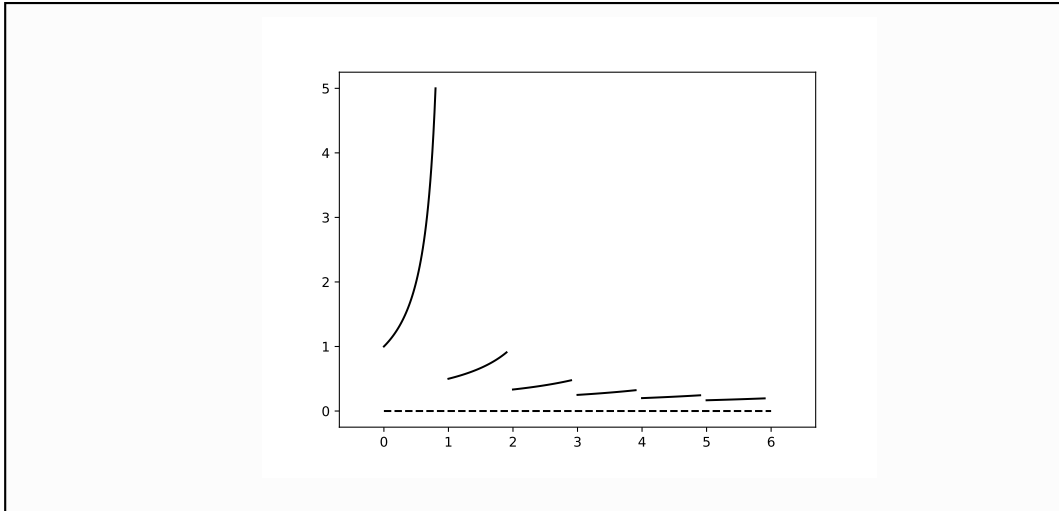
$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0,$$

donc, par encadrement, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

8. Tracer l'allure du graphe de f .

Correction

On en déduit le joli graphe suivant



On définit

$$g : \begin{cases}]0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[\\ y \mapsto \begin{cases} \left\lfloor \frac{1}{y} \right\rfloor + 1 - \left\{ \frac{1}{y} \right\} & \text{si } \frac{1}{y} \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{y} - 1 & \text{si } \frac{1}{y} \in \mathbb{N} \end{cases} \end{cases}$$

9. Vérifier que g est la bijection réciproque de f .

Correction

On montre que $f \circ g = \text{Id}_{]0, +\infty[}$ et $g \circ f = \text{Id}_{[0, +\infty[}$.

- soit $y \in]0, +\infty[$.
— si $\frac{1}{y} \notin \mathbb{N}$, alors

$$f \circ g(y) = f \left(\left\lfloor \frac{1}{y} \right\rfloor + 1 - \left\{ \frac{1}{y} \right\} \right).$$

Notons $z = \left\lfloor \frac{1}{y} \right\rfloor + 1 - \left\{ \frac{1}{y} \right\}$. Alors, comme $\frac{1}{y} \notin \mathbb{N}$, $\left\{ \frac{1}{y} \right\} > 0$, donc $0 < 1 - \left\{ \frac{1}{y} \right\} < 1$, donc

$$z = \underbrace{\left\lfloor \frac{1}{y} \right\rfloor}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{1 - \left\{ \frac{1}{y} \right\}}_{\in]0, 1[},$$

ce qui assure que $\boxed{[z] = \left\lfloor \frac{1}{y} \right\rfloor}$, et que $\{z\} = 1 - \left\{ \frac{1}{y} \right\}$ Ainsi,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{[z] + 1 - \{z\}} \\ &= \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{y} \right\rfloor + 1 - 1 + \left\{ \frac{1}{y} \right\}} \\ &= \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{y} \right\rfloor + \left\{ \frac{1}{y} \right\}} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y. \end{aligned}$$

Donc $f \circ g(y) = y$.

— si $\frac{1}{y} \in \mathbb{N}$, alors

$$f(g(y)) = f\left(\frac{1}{y} - 1\right) = \frac{1}{\left[\frac{1}{y} - 1\right] + 1 - \left\{\frac{1}{y} - 1\right\}}$$

Mais $\frac{1}{y} - 1 \in \mathbb{N}$, donc

$$f(g(y)) = \frac{1}{\frac{1}{y} - 1 + 1 - 0} = y.$$

On a donc démontré que $f \circ g(y) = y$, donc $f \circ g = \text{Id}_{]0, +\infty[}$.

- soit $x \in [0, +\infty[$. Alors $f(x) = \frac{1}{[x] + 1 - \{x\}}$. Déjà,

$$\frac{1}{f(x)} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow [x] + 1 - \{x\} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 1 - \{x\} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{N}.$$

(en effet, $\{x\} \in [0, 1[$)

— si $x \in \mathbb{N}$, alors

$$g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x+1}\right) = x + 1 - 1 = x.$$

— si $x \notin \mathbb{N}$, alors $\frac{1}{f(x)} \notin \mathbb{N}$, donc

$$g(f(x)) = g\left(\frac{1}{[x] + 1 - \{x\}}\right).$$

Mais si $z = [x] + 1 - \{x\}$, alors $[z] = [x]$ et $\{z\} = 1 - \{x\}$. Donc

$$g(f(x)) = [z] + 1 - \{z\} = [x] + 1 - 1 + \{x\} = [x] + \{x\} = x.$$

Dans tous les cas, $g \circ f(x) = x$, donc $g \circ f = \text{Id}_{[0, +\infty[}$.

On a ainsi démontré que f était bijective, de bijection réciproque g !

B-II. Manipulation d'une suite récurrente

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 10.** Calculer les termes u_n pour n allant de 1 à 5. Le mettre sous forme irréductible si nécessaire.

Correction

Calculons :

- $u_1 = \frac{1}{1+1-0} = \frac{1}{2}$
- $u_2 = \frac{1}{0+1-\frac{1}{2}} = 2,$

$$\begin{aligned} \bullet u_3 &= \frac{1}{2+1-0} = \frac{1}{3}, \\ \bullet u_4 &= \frac{1}{0+1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}, \\ \bullet u_5 &= \frac{1}{1+1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

11. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Q}_+^*$.

Correction

On démontre le résultat par récurrence. Pour l'initialisation, $u_0 \in \mathbb{Q}_+^*$. Ensuite, si $n \in \mathbb{N}$ est tel que $u_n \in \mathbb{Q}_+^*$, $2 \lfloor u_n \rfloor + 1 - u_n \in \mathbb{Q}_+^*$, donc son inverse aussi, donc $f(u_n)$ aussi, i.e. $u_{n+1} \in \mathbb{Q}_+^*$. Ceci conclut la preuve, par le principe de récurrence.

Notre but est de démontrer que l'application φ définie comme suit est bijective :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}_+^* \\ n \mapsto u_n \end{cases}.$$

On remarque que, par récurrence immédiate, pour tout entier naturel n ,

$$\varphi(n) = u_n = f(u_{n-1}) = f(f(u_{n-2})) = \cdots = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}(u_0) = f^n(u_0),$$

l'écriture f^n étant une notation pour désigner $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

B-III. Injectivité

12. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = 1 \Rightarrow n = 0$.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 1$. Supposons que $n \neq 0$. Alors $1 = u_n = f(u_{n-1})$. Mais f est bijective et $f(0) = 1$, donc $u_{n-1} = 0$, ce qui est absurde car $u_0 = 1$ et f est à valeurs dans $]0, +\infty[$!
Donc, nécessairement, $n = 0$.

13. En déduire que l'application φ est injective.

Correction

Soient n et p dans $\mathbb{N}$ tels que $\varphi(n) = \varphi(p)$. Alors $f^n(u_0) = f^p(u_0)$. Supposons $n \leq p$. Alors $f^n(u_0) = f^n(f^{p-n}(u_0))$. Par injectivité de f (et donc de f^n par récurrence immédiate), $u_0 = f^{p-n}(u_0)$. Donc $u_{p-n} = u_0$ donc, par la question précédente, $n - p = 0$, i.e. $n = p$.
Donc l'application φ est injective !

B-IV. Surjectivité

Pour démontrer la surjectivité, nous introduisons une quantité, appelée **poids** d'un rationnel.

Définition 1

Soit $r \in \mathbb{Q}_+^*$, $r = \frac{p}{q}$ avec $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $\text{pgcd}(p, q) = 1$.

Le poids de r , noté $\omega(r)$, est la quantité $\omega(r) = p + q$. En particulier, si $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega\left(\frac{n}{1}\right) = n + 1$.

On note, pour $m \in \mathbb{N}^*$, $W_m = \{r \in \mathbb{Q}_+^*, \omega(r) = m\}$.

14. Déterminer W_2, W_3, W_4 .

Correction

- W_2 : on cherche les fractions $\frac{p}{q}$ telles que $p + q = 2$. La seule possibilité est $1 + 1$, donc $W_2 = \{1\}$.
- $W_3 = \{p/q, \text{pgcd}(p, q) = 1 \text{ et } p + q = 3\} = \{1/2, 2/1\}$
- $W_4 = \{1/3, 3/1\}$. (remarque : $2/2 \notin W_4$)

15. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{Q}_+^*, \forall (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2, x = \frac{a}{b} \Rightarrow \omega(x) \leq a + b$.
Ici, on n'a pas nécessairement $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

Correction

Soit $x \in \mathbb{Q}_+^*, x = \frac{p}{q}$ avec $\text{pgcd}(p, q) = 1$. Si $x = \frac{a}{b}$, alors on sait que $a = kp$ et $b = kq$. Donc

$$\omega(x) = p + q \leq k(p + q) = a + b.$$

16. Démontrer que

- $\forall x \in \mathbb{Q} \cap]1, +\infty[, \omega(x - 1) < \omega(x),$
- $\forall x \in \mathbb{Q} \cap]0, 1[, \omega\left(\frac{x}{1-x}\right) < \omega(x).$

Correction

- Soit $x \in \mathbb{Q} \cap]1, +\infty[, x = \frac{p}{q}$, avec $\text{pgcd}(p, q) = 1$. De plus, $p > q$ car $x > 1$.
Ainsi, $x - 1 = \frac{p}{q} - 1 = \frac{p - q}{q}$, de poids

$$\omega(x - 1) \leq p - q + q = p < p + q,$$

la première inégalité étant due à la question précédente.

- Soit $x \in \mathbb{Q} \cap]0, 1[$. Alors $x = \frac{p}{q}$ avec $\text{pgcd}(p, q) = 1$ et $p < q$. Ainsi,

$$\omega\left(\frac{x}{1-x}\right) = \omega\left(\frac{\frac{p}{q}}{1 - \frac{p}{q}}\right) = \omega\left(\frac{p}{q-p}\right) \leq p + q - p < p + q.$$

On introduit alors, naturellement,

$$\sigma : \left[\begin{array}{l} [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[\\ x \mapsto x - 1 \end{array} \right. , \alpha : \left[\begin{array}{l} [0, 1[\rightarrow [0, +\infty[\\ x \mapsto \frac{x}{1-x} \end{array} \right.$$

On voit déjà très simplement que σ est bijective et que $\sigma^{-1} : x \mapsto x + 1$.

17. Vérifier la bijectivité de α et préciser une expression de α^{-1} .

Correction

Soit $y \geq 0$, $x \in [0, 1[$. Alors

$$\alpha(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = y \Leftrightarrow x = y(1-x) \Leftrightarrow \frac{y}{1+y},$$

cette dernière expression étant bien dans $[0, 1[$. Ainsi, α est bijective, de bijection réciproque $y \mapsto \frac{y}{1+y}$.

18. Démontrer que $f \circ \alpha^{-1} = \sigma^{-1}$.

Correction

Soit $x \geq 0$. Alors $\alpha^{-1}(x) \in [0, 1[$, donc

$$f(\alpha^{-1}(x)) = \frac{1}{1 - \alpha^{-1}(x)} = \frac{1}{1 - \frac{x}{1+x}} = \frac{1+x}{1+x-x} = 1+x = \sigma^{-1}(x).$$

19. Démontrer que $f \circ \sigma^{-1} = \alpha^{-1} \circ f$.

Correction

Soit $x \geq 0$. Alors

$$f \circ \sigma^{-1}(x) = \frac{1}{[x+1] + 1 - \{x\}} = \frac{1}{[x] + 2 - \{x\}}$$

et

$$\alpha^{-1} \circ f(x) = \frac{f(x)}{1 + f(x)} = \frac{1}{[x] + 1 - \{x\}} \frac{1}{1 + \frac{1}{[x] + 1 - \{x\}}} = \frac{1}{[x] + 2 - \{x\}},$$

d'où l'égalité désirée

20. En déduire enfin que $\sigma^{-1} \circ f = f \circ f \circ \sigma^{-1}$.

Correction

Courage ! On écrit

$$\begin{aligned} f \circ f \circ \sigma^{-1} &= f \circ \alpha^{-1} \circ f \text{ par 18.} \\ &= \sigma^{-1} \circ f \text{ par 19.} \end{aligned}$$

D'où le résultat désiré, sans douleur :)

21. En utilisant les relations ci-dessus, conclure par récurrence sur le poids que φ est surjective.

Proposition de stratégie :

- On pourra remarquer, dans l'hérédité, que si $x \in \mathbb{Q}_+^*$, on peut construire un rationnel de poids strictement inférieur à x .
- On rappelle que si $p \in \mathbb{N}$, $u_p = f^p(x)$.
- On rappelle que $x = \alpha^{-1} \circ \alpha(x)$ et $x = \sigma^{-1} \circ \sigma(x)$.
- On pourra ensuite utiliser les relations 18., 19. ou 20. pour conclure.

Correction

Démontrons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$\forall x \in \mathbb{Q}_+^*, \omega(x) = n \Rightarrow \exists p \in \mathbb{N}, x = u_p. \quad (\mathcal{P}_n)$$

Initialisation. Elle est évidente pour $n = 1 : 1 = u_0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_k$ soit vraie pour tout k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $x \in W_{n+1}$.

Alors

- si $x \in [0, 1[$, on sait que $\omega(\alpha(x)) < \omega(x)$. Par hypothèse de récurrence, on dispose de $p \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha(x) = u_p = f^p(1)$. Mais alors

$$\begin{aligned} x &= \alpha^{-1}(\alpha(1)) \\ &= \alpha^{-1} \circ f \circ f^{p-1}(1) \\ &= f \circ \sigma^{-1} \circ f^{p-1}(1) \\ &= f \circ (\sigma^{-1} \circ f) \circ f^{p-2}(1) \\ &= f \circ (f \circ f \circ \sigma^{-1}) \circ f^{p-2}(1) \\ &= \dots \\ &= f^q(\sigma^{-1}(1)) \text{ en répétant le même procédé (avec } q = 2p - 1 \text{ ou quelque chose du genre)} \\ &= f^q(2) = f^{q+2}(1) \text{ car } 2 = f(f(1)) \end{aligned}$$

- si $x \in]1, +\infty[$, alors $\omega(\sigma(x)) < \omega(x)$. Par hypothèse de récurrence, on dispose de $p \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma(x) = u_p = f^p(1)$. Alors

$$x = \sigma^{-1} \circ f^p(1) = \dots = f^q(\sigma^{-1}(1)) = f^{q+2}(1),$$

par le même raisonnement que précédemment.

Ceci conclut l'hérédité, ainsi que la récurrence !

B-V. Conclusion

22. Conclure alors que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Correction

On remarque simplement que, identiquement à précédemment, $\mathbb{Q}_-^*$ est en bijection avec $\mathbb{N}$. Comme $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Q}_+^*$ et $\mathbb{Q}_-^*$ sont en bijection avec $\mathbb{N}^*$. Notons ξ une bijection de $\mathbb{Q}_+^*$ dans $\mathbb{N}$ et ζ une bijection de $\mathbb{Q}_-^*$ dans $\mathbb{N}^*$. On pose alors

$$\rho : \begin{array}{l} \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \\ x \mapsto \begin{cases} -\zeta(x) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \xi(x) & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array}$$

Alors ρ est une bijection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}$, qui est dénombrable. C'est donc gagné !

C. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

Dans cette partie, un peu différente des autres, on montre, au contraire, que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. On suppose par l'absurde que $\mathbb{R}$ est dénombrable. Notons $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des réels. On rappelle le théorème suivant, lié aux suites réelles :

Proposition 2

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante,
- $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante,
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$.

Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ .

23. Expliciter deux réels a_0 et b_0 tels que $x_0 \notin [a_0, b_0]$.

Correction

C'est une question à presque 0 point, juste une mise en jambes. Si vous n'avez fait que ça dans la partie, vous n'aurez pas grand chose... On pose $a_0 = x_0 + 1$ et $b_0 = x_0 + 2$.

24. Démontrer l'existence, de deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, [a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \notin [a_n, b_n]$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = \frac{1}{3^n}(b_0 - a_0)$.

On demande obligatoirement un **dessin** illustrant la construction des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Correction

Comme je suis le prof et que je tape les réponses, je ne vais pas faire de dessin... On construit les deux suites par récurrence. On a déjà construit a_0, b_0 .

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que a_n, b_n soit construit.

Séparons le segment $[a_n, b_n]$ en trois parts égales. L'une d'elles ne contient pas x_{n+1} (même s'il est à la frontière entre 2 parties, il ne sera pas dans la troisième). Cette partie est un segment de la forme $[c_n, d_n]$ où $c_n \geq a_n$ et $d_n \leq b_n$.

On pose ainsi $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = d_n$. Alors $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, $x_{n+1} \notin [a_{n+1}, b_{n+1}]$,

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{3}(b_n - a_n).$$

25. En considérant $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$, aboutir à une contradiction.

Correction

Ainsi, les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, et convergent donc vers une limite ℓ , qui a la bonne idée d'être dans tous les segments $[a_n, b_n]$.

Donc $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$, mais, pourtant, pour tout p dans $\mathbb{N}$, $x_p \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \dots$ **AB-**
SURDE! Ceci contredit le fait que $\mathbb{R} = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$!
Donc $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable !

Ainsi, nous avons montré que $\mathbb{R}$ n'était pas dénombrable.