

DM 04+ Treillis et théorème de Cantor-Bernstein

A. Notion de treillis

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble muni d'une relation d'ordre. On dit que E est un treillis si pour tous x et y de E , l'ensemble $\{x, y\}$ possède une borne supérieure et une borne inférieure. On notera alors $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ et $x \vee y = \sup\{x, y\}$. On remarque qu'alors $x \wedge y = y \wedge x$ et que $x \vee y = y \vee x$. Ainsi, $\mathbb{N}^*$ muni de la relation de divisibilité $|$ est un treillis : si a et b sont dans $\mathbb{N}^*$, $a \wedge b$ est le pgcd de a et b et $a \vee b$ leur ppcm.

1. Montrer que si la relation $\preceq$ sur E est totale, alors $(E, \preceq)$ est un treillis.
2. $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est-il un treillis ? Si oui, le justifier en précisant, pour A et B dans $\mathcal{P}(E)$, $A \wedge B$ et $A \vee B$.

Un treillis est dit **borné** s'il admet un plus petit élément, noté 0 , et un plus grand élément, noté 1 .

Un treillis $(E, \preceq)$ est dit **complémenté** si pour tout x dans E , il existe un élément x' dans E , appelé **un** complémentaire de x dans E , tel que $x \wedge x' = 0$ et $x \vee x' = 1$.

Un treillis $(E, \preceq)$ est dit **distributif** si pour tous x, y et z de E ,

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \text{ et } x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

(autrement dit $\wedge$ est distributive sur $\vee$ et $\vee$ est distributive sur $\wedge$)

3. Montrer que $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est un treillis complémenté distributif borné.
4. Soit $(E, \preceq)$ un treillis borné, complémenté, distributif.
 - (a) Soit x dans E . Que vaut $x \wedge 0$, $x \vee 0$, $x \wedge 1$, $x \vee 1$?
 - (b) Montrer que $\wedge$ est associatif, i.e.

$$\forall (x, y, z) \in E^3, x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z.$$

De même, on peut montrer que $\vee$ est associatif.

- (c) Si x est dans E , montrer qu'il y a unicité du complémentaire de x . (prendre x' et x'' deux complémentaires de x dans E , considérer $y = x' \wedge (x \vee x'')$). On notera alors **le** complémentaire de x dans E $\bar{x}$.
- (d) Montrer alors les lois de Morgan :

$$\forall (x, y) \in E^2, \overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y} \text{ et } \overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}.$$

5. Montrer par récurrence sur le nombre d'éléments que toute partie finie d'un treillis est bornée (attention, ici « bornée » est à prendre au sens de « partie bornée » comme dans le cours).

Dernière définition, un treillis est dit **complet** (attention, rien à voir avec « complémenté ») si toute partie de ce treillis admet une borne supérieure.

6. Démontrer que si E est un treillis complet, alors il possède un plus grand et un plus petit élément.
7. Démontrer que si E est un treillis complet, alors toute partie de E admet une borne inférieure.
8. Démontrer que $(\mathbb{Q} \cap [0, 2], \leq)$ est un treillis borné mais qu'il n'est pas complet. *Cela montre que le caractère complet est + fort que le caractère borné !*
9. Justifier que $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est un treillis complet. (on précisera, si $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathcal{P}(E)$, la borne supérieure et la borne inférieure de $\mathcal{A}$).

B. Théorème de Knaster-Tarski

Soit $(T, \preceq)$ un treillis complet, f une application croissante de T dans T . On veut montrer que f admet un point fixe (théorème de Knaster-Tarski).

Soit $S = \{x \in T, f(x) \leq x\}$.

10. Justifier que S admet une borne inférieure m .
11. Démontrer que $f(m) = m$.
12. Démontrer qu'en fait, l'ensemble $\{x \in T, f(x) = x\}$ est un treillis complet.

C. Application au théorème de Cantor-Bernstein

On applique dans cette partie le théorème de Knaster-Tarski à une preuve du théorème de Cantor-Bernstein. Soient E et F deux ensembles, tels qu'il existe une injection f de E dans F et une injection g de F dans E . On veut montrer qu'il existe une bijection de E dans F .

On définit l'application $\Psi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ par

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \Psi(A) = E \setminus g(F \setminus f(A)).$$

13. Démontrer que Ψ est **croissante** de $(\mathcal{P}(E), \subset)$ dans $(\mathcal{P}(E), \subset)$.
14. En déduire qu'il existe $M \subset E$ tel que $\Psi(M) = M$.
15. Si $N = F \setminus f(M)$, démontrer que $g(N) = E \setminus M$.

On définit alors

$$\alpha : \begin{cases} M \rightarrow f(M) \\ x \mapsto f(x) \end{cases}, \beta : \begin{cases} F \setminus f(M) \rightarrow E \setminus M \\ x \mapsto g(x) \end{cases}$$

16. Démontrer que α et β sont bijectives.
17. Démontrer alors qu'il existe une bijection h de E dans F .