Chapitre 7
Nombres réels et suites

1 Nombres réels (rappels)

Nous n'allons pas construire les nombres réels, qui sont beaucoup plus difficiles à construire que les nombres complexes. Nous allons commencer le cours par une proposition, non pas par une définition. C'est la propriété importante des nombres réelles, qui n'est pas démontrable puisque elle dépend de la construction de $\mathbb{R}$.

Remarque 1 (Rappels sur les calculs dans les réels et les relations d'ordre)

- $\forall x \in \mathbb{R},\ -|x| \leqslant x \leqslant |x|$,
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall a > 0$,
$$|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$$
et
$$|x| \geqslant a \Leftrightarrow x \geqslant a \text{ ou } x \leqslant -a,$$
- pour tout réel x,
$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \text{ ou } x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$
- $\forall \varepsilon > 0,\ 0 < \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$,
- si $A \subset \mathbb{R}$,
  — A est majorée ssi $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \leqslant M$,
  — A est minorée ssi $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ m \leqslant x$,
  — A est bornée ssi $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in A,\ m \leqslant x \leqslant M$,

  si $a \in \mathbb{R}$,
  — $a = \min(A) \Leftrightarrow a \in A$ et $\forall x \in A,\ a \leqslant x$,
  — $a = \max(A) \Leftrightarrow a \in A$ et $\forall x \in A,\ x \leqslant a$,
  — $a = \inf(A) \Leftrightarrow a$ est un minorant de A et $\forall b$ minorant de $A,\ a \geqslant b$.
  — $a = \sup(A) \Leftrightarrow a$ est un majorant de A et $\forall b$ majorant de $A,\ a \leqslant b$.

Proposition 2

Soit $A \subset \mathbb{R}$, soit $B = \{|x|, x \in A\}$. Alors A est bornée si et seulement si B est majorée.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ Si A est borné, on dispose de $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tels que
$$\forall x \in A,\ m \leqslant x \leqslant M.$$
Posons $S = \max(|M|, |m|)$. Alors
— $S \geqslant |m| \geqslant -m$, donc $-S \leqslant m$,
— $S \geqslant |M| \geqslant M$.

En particulier $S \geqslant 0$. Et, pour tout x de A,

$$-s \leqslant m \leqslant x \leqslant M \leqslant S,$$

i.e. pour tout x dans A, $|x| \leqslant S$.
Donc, pour tout y dans B, $y \leqslant S$. Donc B est majorée.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si B est majorée, on dispose de $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in B,\ y \leqslant M$. Donc, pour tout x dans A, $|x| \leqslant M$, donc

$$\forall x \in A,\ -M \leqslant x \leqslant M,$$

donc A est bornée.

■

Proposition 3 (Borne supérieure)

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Corollaire 4

Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Démonstration

Les deux démonstrations sont à revoir à l'occasion ! ■

Proposition 5 (Une définition alternative de la borne supérieure)

Soit $A \subset \mathbb{R}$, non vide. Soit $M \in \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes

(i) $M = \sup(A)$,

(ii) $\forall x \in A,\ x \leqslant M \wedge \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A,\ M - \varepsilon \leqslant a \leqslant M$,

(iii) $\forall x \in A,\ x \leqslant M \wedge \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A,\ |M - a| \leqslant \varepsilon$.

Remarque 6

Les deux dernières propositions sont presque les mêmes, le résultat important est l'équivalence $(i) \Leftrightarrow (ii)$.

Démonstration

On va démontrer (i)⇔(ii) et (ii)⇔(iii) (pour bien mettre en avant le fait que c'est la première implication qui est fondamentale.

- $\boxed{\text{(i)}\Rightarrow\text{(ii)}}$ Supposons que $M = \sup(A)$.
  . Déjà, M majore A.
  . Ensuite, soit $\varepsilon > 0$. Si on avait

$$\forall x \in A,\ M - \varepsilon > x,$$

  alors $M - \varepsilon$ serait un majorant de A strictement supérieur à M, absurde ! Donc on dispose de $a \in A$ tel que $M - \varepsilon \leqslant a$.

Mais $a \in A$ donc $a \leqslant M$, donc, finalement,

$$M - \varepsilon \leqslant a \leqslant M.$$

- $\boxed{\text{(ii)}\Rightarrow\text{(i)}}$ Supposons (ii).
  . Déjà, M est un majorant de A car $\forall x \in A,\ x \leqslant M$.
  . Ensuite, soit N un autre majorant de A. Si on avait $N < M$, alors en notant $\varepsilon = \dfrac{M-N}{2}$,

  $$\varepsilon > 0 \text{ et } N = M - 2\varepsilon < M - \varepsilon.$$

  Mais alors, par (ii), on dispose de $x \in A$ tel que $M - \varepsilon \leqslant x$, donc $N < x$, absurde !
  Donc $N \geqslant M$.
  Donc M est bien la borne supérieure de A.

Démontrons alors l'autre équivalence.

- $\boxed{\text{(ii)}\Rightarrow\text{(iii)}}$ Supposons (ii).
  . Déjà, M est un majorant de A donc on a bien $\forall x \in A,\ x \leqslant M$.
  . Ensuite, soit $\varepsilon > 0$. Alors on dispose de $x \in A$ tel que

  $$M - \varepsilon \leqslant x \leqslant M \leqslant M + \varepsilon,$$

  donc $|x - M| \leqslant \varepsilon$.
- $\boxed{\text{(iii)}\Rightarrow\text{(ii)}}$ Supposons (iii).
  . Déjà, M est un majorant de A donc on a bien $\forall x \in A,\ x \leqslant M$.
  . Ensuite, soit $\varepsilon > 0$. Alors on dispose de $x \in A$ tel que $|x - M| \leqslant \varepsilon$. Alors

  $$M - \varepsilon \leqslant x \leqslant M + \varepsilon,$$

  Mais M majore A donc $x \leqslant M$. D'où (ii).

■

Proposition 7 (Une définition alternative de la borne inférieure)

Soit $A \subset \mathbb{R}$, non vide. Soit $m \in \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes

(i) $m = \inf(A)$,

(ii) $\forall x \in A,\ x \leqslant m \wedge \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A,\ m - \varepsilon \leqslant a \leqslant m$,

(iii) $\forall x \in A,\ x \leqslant m \wedge \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A,\ |m - a| \leqslant \varepsilon$.

Exemple 8

Soit $A = \left\{ \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Démontrons que $0 = \inf(A)$.
Déjà, pour tout a dans A, $0 \leqslant A$.
Ensuite, soit $\varepsilon > 0$.

...au brouillon...

On cherche n tel que $\dfrac{1}{n} \geqslant \varepsilon$, i.e. $n \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$.

 nlaillet.math@gmail.com

Posons $n = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$. Alors $n \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$ donc $0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$.
Donc $0 = \inf(A)$.

On rappelle que l'on a vu 9 types d'intervalles dans $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R},\ ]-\infty, b],\ ]-\infty, b[,\ [a, +\infty[,\ ]a, +\infty[,\ ]a, b[,\ ]a, b],\ [a, b[,\ [a, b].$$

Définition 9

Un ensemble I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement s'il vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2,\ (x \leqslant y) \Rightarrow ([x, y] \subset \mathrm{I}).$$

Remarque 10

Cela veut dire que l'ensemble est « sans trou ».

Proposition 11 (Précision de la proposition précédente)

Soit I une partie $\mathbb{R}$, non vide, vérifiant $\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2,\ (x \leqslant y) \Rightarrow ([x, y] \subset \mathrm{I})$.

(i) si I n'est ni majoré, ni minoré, alors $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

(ii) si I est majoré, non minoré, soit $b = \sup(\mathrm{I})$
- si $b \in \mathrm{I}$, $\mathrm{I} =]-\infty, b]$,
- si $b \notin \mathrm{I}$, $\mathrm{I} =]-\infty, b[$.

(iii) si I est minoré, non majoré, soit $a = \inf(\mathrm{I})$,
- si $a \in \mathrm{I}$, $\mathrm{I} = [a, +\infty[$,
- si $a \notin \mathrm{I}$, $\mathrm{I} =]a, +\infty[$.

(iv) si I est borné, soit $a = \inf(\mathrm{I})$ et $b = \sup(\mathrm{I})$.
- si $a \in \mathrm{I}$ et $b \in \mathrm{I}$, $\mathrm{I} = [a, b]$,
- si $a \notin \mathrm{I}$ et $b \in \mathrm{I}$, $\mathrm{I} =]a, b]$,
- si $a \in \mathrm{I}$ et $b \notin \mathrm{I}$, $\mathrm{I} = [a, b[$,
- si $a \notin \mathrm{I}$ et $b \notin \mathrm{I}$, $\mathrm{I} =]a, b[$.

Démonstration

(i) si I n'est ni majoré, ni minoré, démontrons que $\mathrm{I} = \mathbb{R}$. Déjà, I est clairement inclus dans $\mathbb{R}$.
Ensuite, soit $x \in \mathbb{R}$. Comme I n'est pas majoré ni minoré par x, on dispose de $\alpha \in \mathrm{I}$ tel que $\alpha \leqslant x$ et de $\beta \in \mathrm{I}$ tel que $x \leqslant \beta$.
Mais comme I est un intervalle, $[\alpha, \beta] \subset \mathrm{I}$, donc $x \in \mathrm{I}$.
Donc, par double inclusion, $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

(ii) si I est majoré, non minoré, soit $b = \sup(\mathrm{I})$
- si $b \in \mathrm{I}$, montrons que $\mathrm{I} =]-\infty, b]$.

— déjà, pour tout x dans I, $x \leqslant b$, donc $\mathrm{I} \subset]-\infty, b]$.

— ensuite, soit $x \in]-\infty, b]$. Alors comme I n'est pas minoré, on dispose de $\alpha \in \mathrm{I}$ tel que $\alpha \leqslant x$. Mais comme α et b sont dans I, $[\alpha, b] \subset \mathrm{I}$, donc $x \in \mathrm{I}$.

Donc, par double inclusion, $\mathrm{I} =]-\infty, b]$.

- si $b \notin \mathrm{I}$, montrons que $\mathrm{I} =]-\infty, b[$.

— déjà, pour tout x dans I, $x \leqslant b$, et $x \neq b$ car $b \notin \mathrm{I}$, donc $x < b$, donc $\mathrm{I} \subset]-\infty, b[$.

— ensuite, soit $x \in]-\infty, b[$.
Alors comme I n'est pas minoré, on dispose de $\alpha \in \mathrm{I}$ tel que $\alpha \leqslant x$.
De plus, si l'on note $\varepsilon = b - x$, par définition de $b = \sup(\mathrm{I})$, on dispose de $\beta \in \mathrm{I}$ tel que $b - \varepsilon \leqslant \beta \leqslant b$, i.e. $x \leqslant \beta$.
Mais comme α et β sont dans I, $[\alpha, \beta] \subset \mathrm{I}$, donc $x \in \mathrm{I}$.

Donc, par double inclusion, $\mathrm{I} =]-\infty, b[$.

(iii) si I est minoré, non majoré, soit $a = \inf(\mathrm{I})$,

- si $a \in \mathrm{I}$, montrons que $\mathrm{I} = [a, +\infty[$,

— déjà, pour tout x dans I, $x \geqslant a$, donc $\mathrm{I} \subset [a, +\infty[$.

— ensuite, soit $x \in [a, +\infty[$. Alors comme I n'est pas majoré, on dispose de $\beta \in \mathrm{I}$ tel que $\beta \geqslant x$. Mais comme a et β sont dans I, $[a, \beta] \subset \mathrm{I}$, donc $x \in \mathrm{I}$.

Donc, par double inclusion, $\mathrm{I} = [a, +\infty[$.

- si $a \notin \mathrm{I}$, montrons que $\mathrm{I} =]a, +\infty[$.

— déjà, pour tout x dans I, $x \geqslant a$, et $x \neq a$ car $a \notin \mathrm{I}$, donc $x > a$, donc $\mathrm{I} \subset]a, +\infty[$.

— ensuite, soit $x \in]a, +\infty[$.
Alors comme I n'est pas majoré, on dispose de $\beta \in \mathrm{I}$ tel que $\beta \geqslant x$.
De plus, si l'on note $\varepsilon = x - a$, par définition de $a = \inf(\mathrm{I})$, on dispose de $\alpha \in \mathrm{I}$ tel que $a \leqslant \alpha \leqslant a + \varepsilon$, i.e. $\alpha \leqslant x$.
Mais comme α et β sont dans I, $[\alpha, \beta] \subset \mathrm{I}$, donc $x \in \mathrm{I}$.

Donc, par double inclusion, $\mathrm{I} =]a, +\infty[$.

(iv) si I est borné, soit $a = \inf(\mathrm{I})$ et $b = \sup(\mathrm{I})$.

- si $a \in \mathrm{I}$ et $b \in \mathrm{I}$,

— déjà, par définition d'un intervalle, $[a, b] \subset \mathrm{I}$.

— mais comme I est minoré par a et majoré par b, $\mathrm{I} \subset [a, b]$.

Donc $\mathrm{I} = [a, b]$

- si $a \notin \mathrm{I}$ et $b \in \mathrm{I}$, $\mathrm{I} =]a, b]$,

— Déjà, pour tout x dans I, $a < x \leqslant b$ car a minore I mais $a \notin \mathrm{I}$, et b majore I.

— Ensuite, si $x \in]a, b]$, si l'on note $\varepsilon = x - a$, par définition de $a = \inf(\mathrm{I})$, on dispose de $\alpha \in \mathrm{I}$ tel que $a \leqslant \alpha \leqslant a + \varepsilon$, i.e. $\alpha \leqslant x$.
Donc $\alpha \leqslant x \leqslant b$. Comme I est un intervalle, $[\alpha, b] \subset \mathrm{I}$, donc $x \in \mathrm{I}$.

D'où, par double inclusion, $\mathrm{I} =]a, b]$.

- si $a \in \mathrm{I}$ et $b \notin \mathrm{I}$, $\mathrm{I} = [a, b[$,

— Déjà, pour tout x dans I, $a \leqslant x < b$ car b majore I mais $b \notin \mathrm{I}$, et a minore I.

— Ensuite, si $x \in]a, b]$, si l'on note $\varepsilon = b - x$, par définition de $b = \sup(\mathrm{I})$, on dispose de $\beta \in \mathrm{I}$ tel que $b - \varepsilon \leqslant \beta \leqslant b$, i.e. $x \leqslant \beta$.
Donc $a \leqslant x \leqslant \beta$. Comme I est un intervalle, $[a, \beta] \subset \mathrm{I}$, donc $x \in \mathrm{I}$.

D'où $\mathrm{I} = [a, b[$ par double inclusion.

- si $a \notin \mathrm{I}$ et $b \notin \mathrm{I}$, $\mathrm{I} =]a, b[$.
  - Déjà, pour tout x dans I, $a < x < b$ car a minore I mais $a \notin \mathrm{I}$, et b majore I mais $b \notin \mathrm{I}$.
  - Ensuite, soit $x \in]a, b[$.
    Si l'on note $\varepsilon = x - a$, par définition de $a = \inf(\mathrm{I})$, on dispose de $\alpha \in \mathrm{I}$ tel que $a \leqslant \alpha \leqslant a + \varepsilon$, i.e. $\alpha \leqslant x$.
    Si l'on note $\varepsilon' = b - x$, par définition de $b = \sup(\mathrm{I})$, on dispose de $\beta \in \mathrm{I}$ tel que $b - \varepsilon' \leqslant \beta \leqslant b$, i.e. $x \leqslant \beta$.
    Donc $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$. Comme I est un intervalle, $[\alpha, \beta] \subset \mathrm{I}$, donc $x \in \mathrm{I}$.

■

Définition 12

On appelle intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tout intervalle d'une des formes suivantes

$$\mathbb{R},\ ]-\infty, b[,\ ]a, +\infty[,\ ]a, b[.$$

Proposition 13 (Une propriété des intervalles ouverts)

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Alors

$$\forall x \in \mathrm{I},\ \exists \eta > 0,\ [x - \eta, x + \eta] \subset \mathrm{I}.$$

Démonstration

- si $\mathrm{I} = \mathbb{R}$, c'est évident.
- si $\mathrm{I} =]-\infty, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$, soit $x \in \mathrm{I}$. Notons $\varepsilon = b - x$. Alors en posant $\eta = \frac{\varepsilon}{2}$, $x + \eta < x + \varepsilon = b$, donc $[x - \eta, x + \eta] \subset \mathrm{I}$.
- si $\mathrm{I} =]a, +\infty[$, avec $a \in \mathbb{R}$, soit $x \in \mathrm{I}$. Notons $\varepsilon = x - a > 0$. Alors, en posant $\eta = \frac{\varepsilon}{2}$, $a = x - \varepsilon < x - \eta$, donc $[x - \eta, x + \eta] \subset \mathrm{I}$.
- si $\mathrm{I} =]a, b[$, soit $x \in \mathrm{I}$.
  Notons $\varepsilon = x - a > 0$ et $\varepsilon' = b - x > 0$.
  Posons $\eta = \frac{1}{2}\min(\varepsilon, \varepsilon')$. Alors
  $$a = x - \varepsilon < x - \eta \text{ et } x + \eta < x + \varepsilon = b.$$
  Donc $[x - \eta, x + \eta] \subset \mathrm{I}$.

■

Proposition 14

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes

(i) Pour tout intervalle I non vide de $\mathbb{R}$ ouvert, $\mathrm{I} \cap A \neq \emptyset$.

(ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ |x - a| \leqslant \varepsilon$.

Définition 15

Lorsque l'une des propositions précédentes est vérifiée, on dit que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose la première proposition. Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $\varepsilon > 0$.
Notons $\mathrm{I} =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$.
$\mathrm{I} \neq \emptyset$ donc, par (i), $\mathrm{I} \cap A \neq \emptyset$, donc on dispose de $a \in A$ tel que $a \in \mathrm{I}$, i.e.

$$x - \varepsilon < a < x + \varepsilon.$$

Donc $|a-x| < \varepsilon$ donc $|a-x| \leqslant \varepsilon$, d'où (ii)

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose (ii)
Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathrm{I}$. On dispose de $\eta > 0$ tel que $[x-\eta, x+\eta] \subset \mathrm{I}$.
Par (ii), on dispose de $a \in A$ tel que $|x-a| \leqslant \eta$.
Mais alors $a \in [x-\eta, x+\eta] \subset \mathrm{I}$, donc $a \in \mathrm{I}$.
Donc $\mathrm{I} \cap A \neq \emptyset$.

■

Notre but est alors de démontrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Définition 16

Un nombre réel d est dit décimal s'il existe n dans $\mathbb{N}$ tel que $10^n d$ soit entier. On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des décimaux :

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{p}{10^n},\ p \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Si $x \in \mathbb{R}$, l'approximation décimale par défaut de x à 10^{-n} près est la quantité $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

Exemple 17

Proposition 18

Les nombres rationnels, ainsi que les nombres irrationnels, sont denses dans $\mathbb{R}$.

Pour démontrer cette propriété, on va avoir besoin de deux lemmes.

Lemme 19

Soit $x \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$. Alors $10^n x - 1 \leqslant \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x$,
donc $x - \dfrac{1}{10^n} \leqslant \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leqslant x$,
donc $-\dfrac{1}{10^n} \leqslant \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leqslant x$,
Donc

$$\left| x - \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \right| \leqslant \frac{1}{10^n}.$$

Démonstration

La preuve est déjà dans l'énoncé ! ■

Lemme 20

Soit $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Alors

- $a + b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
- si $a \neq 0$, $ab \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Démonstration

Notons $c = a + b$ et $d = ab$.

- si c était dans $\mathbb{Q}$, alors $b = c - a$ serait dans $\mathbb{Q}$, absurde !
- si d était dans $\mathbb{Q}$ et $a \neq 0$, alors $b = \dfrac{d}{a}$ serait dans $\mathbb{Q}$, absurde !

■

Passons alors à la démonstration de la proposition.

Démonstration

(i) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.

...au brouillon...

On va utiliser l'approximation décimale : on sait que

$$\left| x - \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \right| \leqslant \frac{1}{10^n}$$

On veut donc avoir $\dfrac{1}{10^n} \leqslant \varepsilon$, i.e. $n \geqslant \log_{10}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$.

Posons $n = \lfloor -\log_{10}(\varepsilon) \rfloor + 1$. Alors $n \geqslant -\log_{10}(\varepsilon)$, donc $10^n \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$, donc $10^{-n} \leqslant \varepsilon$.

Notons $q = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$. Alors $q \in \mathbb{Q}$ et

$$|x - q| \leqslant \frac{1}{10^n} \leqslant \varepsilon.$$

Donc $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

(ii) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$

- si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on pose $y = x$. Alors $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $|x - y| = 0 \leqslant \varepsilon$.
- si $x \in \mathbb{Q}$,

...au brouillon...

Idée : $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On va ajouter $\dfrac{\sqrt{2}}{n}$ à x, avec n assez grand, de sorte que $\dfrac{\sqrt{2}}{n} \leqslant \varepsilon$, i.e. $n \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$.

Posons $n = \left\lfloor \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$. Alors $n \geqslant \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$, i.e. $\frac{\sqrt{2}}{n} \leqslant \varepsilon$.

Posons $y = x + \frac{\sqrt{2}}{n}$. Alors $\frac{\sqrt{2}}{n} \notin \mathbb{Q}$ et donc $y \notin \mathbb{Q}$, et

$$|y - x| = \frac{\sqrt{2}}{n} \leqslant \varepsilon.$$

Donc $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

■

Remarque 21

Remarquons que l'on a en fait démontré que $\mathbb{D}$ était dense dans $\mathbb{R}$. Mais on a la propriété (simple à démontrer) suivante : si $A \subset B$ et A est dense dans $\mathbb{R}$, B est dense dans $\mathbb{R}$.

2 Suites et convergence

2.1 Généralités

Définition 22

(i) Une suite réelle est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On note leur ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(ii) Si $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on note $\mathbf{u} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Remarque 23

(i) On peut considérer des suites définies sur $\mathbb{N}^*$, sur $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, etc. Exemple : $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(\ln(\ln(n)))_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}}$, etc.

(ii) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite, la variable n est muette. On peut écrire $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_p)_{p \in \mathbb{N}}$. En revanche, u_n est un réel. La variable n est libre, elle a dû être déclarée auparavant.

Remarque 24 (Remarque importante)

Une suite peut être définie de plusieurs manières :

- de manière **explicite**, en donnant, pour tout n, une formule. Exemple :

  Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$.

- de manière **implicite**, le terme u_n étant l'unique solution d'une équation dépendant d'un paramètre n. Exemple :

  Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, x_n l'unique solution positive de l'équation $x^n + nx = 1$.

  (question : pourquoi a-t-on existence et unicité d'un tel réel ?)

- par **récurrence**. C'est une des manières fondamentales de définir une suite réelle. On peut définir une suite par récurrence (simple/double/forte). Exemple :

  Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$.

  ou bien

  Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

2.2 Suites majorées, minorées

Définition 25

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, A l'ensemble des termes de la suite : $A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

(i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite majorée si A est majorée, i.e. ssi

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M.$$

(ii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite minorée si A est minorée, i.e. ssi

$$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n.$$

(iii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite bornée si elle est majorée et minorée.

Proposition 26

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Définition 27

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite croissante (resp. décroissante) si

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, (m \leqslant n) \Rightarrow u_m \leqslant u_n \text{ (resp } u_m \leqslant u_n).$$

Dans le cas d'inégalités stricte, la suite est dite strictement croissante (ou strictement décroissante).
Si une suite est (strictement) croissante ou décroissante, on dit que la suite est (strictement) monotone.

Proposition 28

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante) ssi $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$ (resp. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$).
La proposition s'adapte à la stricte croissance ou à la stricte décroissance.

Démonstration

C'est simplement une récurrence. ■

Remarque 29

Attention, ceci est très faux pour des fonctions réelles ! Si $f : x \mapsto \sin(2\pi x) + x$, f n'est pas croissante (on peut remarquer que $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}$ alors que $f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{4}$) alors que pour tout x, $f(x+1) > f(x)$.

Point de méthode 30

Pour vérifier la monotonie d'une suite, il y a essentiellement quatre possibilités :

(i) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_n = f(n)$, et on connaît les variations de f.
Exemple : étudier les variations de $u_n = e^{n^2-n}$.

(ii) On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

(iii) Si pour tout entier n, $u_n \neq 0$, on compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exemple : étudier les variations de $u_n = \binom{2n}{n}$.
Il faut faire attention au signe de la suite !

(iv) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$, on peut utiliser une des deux techniques précédentes (on verra cela plus en détail par la suite).

Définition 31

Soit une propriété $\mathscr{P}(n)$ indexée sur les entiers naturels. $\mathscr{P}$ est dite vraie à partir d'un certain rang (et on notera apcr) si

$$\exists N \geqslant 0, \forall n \geqslant N, \mathscr{P}(n) \text{ est vraie.}$$

Remarque 32

Il faut toujours pouvoir expliciter ce que signifie « à.p.c.r. » et notamment pouvoir **déclarer** un rang à partir duquel telle propriété est vraie.

Définition 33

Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang, i.e. si

$$\exists K \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n = K.$$

Exemple 34

Montrer que la suite $\left(\left\lfloor \frac{3}{n} \right\rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

2.3 Limites de suites

Définition 35

(i) Une suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge s'il existe un réel ℓ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Dans ce cas, on dit que u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$, ou bien que ℓ est une limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

(ii) Une suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \geqslant M.$$

Dans ce cas, on dit que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, ou bien que $+\infty$ est une limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(iii) Une suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ si

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \leqslant m.$$

Dans ce cas, on dit que u_n tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$, ou bien que $-\infty$ est une limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Remarque 36

(i) On rappelle que dans les propositions précédentes, $\forall n \geqslant N$ cache une **implication** : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow \ldots$

(ii) Ces notions font naturellement intervenir la notion de « proposition vraie à partir d'un certain rang » : dire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ signifie que

$$\forall \varepsilon > 0,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \text{ à partir d'un certain rang}$$

(iii) On peut, sans perte de généralité ou restriction supplémentaire, remplacer

- « $\forall \varepsilon > 0$ » par « $\forall \varepsilon \in]0,1[$ » ,
- « $\forall M \in \mathbb{R}$ » par « $\forall M > 0$ » ,
- « $\forall m \in \mathbb{R}$ » par « $\forall m < 0$ » .

On peut démontrer facilement les équivalences entre les propositions à chaque fois.

Exemple 37

(i) Démontrons que $2n^2 + 3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Soit $M \in \mathbb{R}$.
Alors on a les équivalences suivantes

$$2n^2 + 3 \geqslant M \Leftrightarrow n^2 \geqslant \frac{M-3}{2}.$$

Posons alors $M' = \max\left(\dfrac{M-3}{2}, 0\right)$ et $N = \left\lfloor \sqrt{N'} \right\rfloor + 1$.

Soit $n \geqslant N$. Alors $n^2 \geqslant \dfrac{M-3}{2}$ donc $2n^2 + 3 \geqslant M$.
Donc $2n + 3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(ii) Démontrons que $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Soit $\varepsilon > 0$.

...au brouillon...

Plutôt que de faire des équivalences comme ci-dessus, on peut aussi rechercher au brouillon. On a

$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^n} \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow 1 + \mathrm{e}^n \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \mathrm{e}^n \geqslant \frac{1}{\varepsilon} - 1 \text{«} \Leftrightarrow n \geqslant \ln\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) \text{»}$$

La dernière équivalence n'étant pas tout à fait vraie car on ne sait pas si ce qu'il y a dans la parenthèse est > 0.

Posons $A = \max\left(\dfrac{1}{\varepsilon} - 1, 1\right)$. Posons alors $N = \lfloor \ln(A) \rfloor + 1$. Soit $n \geqslant N$.

Alors $n \geqslant \ln(A)$, donc $\mathrm{e}^n \geqslant A \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$.

Donc $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^n} \leqslant \varepsilon$.

Donc $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(iii) (+ dur, mais méthode intéressante !) Démontrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

- déjà, $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne diverge pas vers $+$ ou $-\infty$. En effet, on écrit déjà la négation de « $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ » :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N,\ u_n < M.$$

  Posons $M = 2$. Alors $|forallN \in \mathbb{N}$, $u_N < 2$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$. De même, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $-\infty$.

- ensuite, démontrons que $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers une limite réelle. Supposons, par l'absurde, que cela soit le cas. Alors on dispose de $\ell \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

  L'idée est alors de se dire que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0.
  Posons $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Alors on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
  En particulier,

$$|u_{N+1} - u_N| = |u_{N+1} - \ell + \ell - u_N| \leqslant |u_{N+1} - \ell| + |\ell - u_N| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 1.$$

  Or,
$$|u_{N+1} - u_N| = |(-1)^{N+1} - (-1)^N| = 2,$$

  ce qui est absurde ! Donc la suite ne converge pas.

Définition 38

On appelle $\overline{\mathbb{R}}$ la **droite réelle achevée**, i.e. $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$.

Proposition 39

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Si $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$ vérifie $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$, alors $\ell = \ell'$.

Définition 40

On dit alors que ℓ est **LA** limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Démonstration

Supposons que $\ell \neq \ell'$ et aboutissons à une absurdité.

- **Cas où ℓ et ℓ' sont réelles.** Comme $\ell \neq \ell'$, on peut supposer, sans perte de généralité, que $\ell < \ell'$.
On sait, par convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ et ℓ', que
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon,$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell'| \leqslant \varepsilon.$$
L'idée est alors de faire en sorte que u_n soit, pour n assez grand, dans deux zones disjointes.
Posons $\varepsilon = \dfrac{\ell' - \ell}{3}$. Alors $\ell + \varepsilon < \ell' - \varepsilon$.
(en effet, $\ell' - \varepsilon - \ell - \varepsilon = \varepsilon > 0$)
Par convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ, on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Par convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ', on dispose de $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N'$, $|u_n - \ell'| \leqslant \varepsilon$.
Posons $N'' = \max(N, N')$. Alors si $n \geqslant N''$,
$$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \text{ et } |u_n - \ell'| \leqslant \varepsilon,$$
donc, en particulier, $u_n \leqslant \ell + \varepsilon$ et $\ell' - \varepsilon \leqslant u_n$, donc
$$u_n \leqslant \ell + \varepsilon < \ell - \varepsilon \leqslant u_n,$$
donc $u_n < u_n$, absurde ! D'où le résultat.
- Si $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' = +\infty$, alors
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon,$$
$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant M.$$
Prenons $\varepsilon = 1$ et $M = |\ell| + 2$. Alors on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon,$$
et de $N' \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant N',\ u_n \geqslant M.$$
Posons $N'' = \max(N, N')$ et prenons $n \geqslant N''$. Alors
$$|u_n| = |u_n - \ell + \ell| \leqslant |u_n - \ell| + |\ell| \leqslant 1 + |\ell|.$$
Donc $u_n \leqslant 1 + |\ell|$. Mais en même temps, $u_n \geqslant M = 2 + |\ell|$, absurde !

- Si $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' = -\infty$, on fait de même.
- Si $\ell = -\infty$ et $\ell' = +\infty$, on fait de même, en prenant $m = -1$ et $M = 1$.

■

Remarque 41

(i) Ne **JAMAIS DIRE** « La limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ » , mais dire

« La limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ℓ »
ou
« $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ »

(ii) Dans $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, n est muette.

(iii) Ne **JAMAIS ÉCRIRE** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = v_n$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v_n$. La chose vers laquelle on tend doit être indépendante de n.

Proposition 42

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, ℓ un réel. Les ASSE

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$.

Démonstration

On va raisonner par équivalences ! On a les équivalences

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon\\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \Big||u_n - \ell| - 0\Big| \leqslant \varepsilon\\ &\lim_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0.\end{aligned}$$

■

Corollaire 43

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si, et seulement si $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Proposition 44

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente, ℓ sa limite. Alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

- **Prenons** $\varepsilon = 1$. Alors on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Alors, si $n \geqslant N$,
$$|u_n| = |u_n - \ell + \ell| \leqslant |u_n - \ell| + |\ell| = 1 + |\ell|.$$
Problème, on n'a pas majoré tous les termes de la suite, mais seulement ceux après le rang N.
- L'ensemble $\{u_n, n \in [\![0, N-1]\!]\}$ est une partie **finie** de $\mathbb{R}$ donc est borné. Donc on dispose de $M > 0$ tel que pour tout n dans $[\![0, N-1]\!]$, $|u_n| \leqslant M$.
- **Posons** $M' = \max(M, 1 + |\ell|)$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
  - si $n \leqslant N - 1$, alors $|u_n| \leqslant M \leqslant M'$,
  - si $n \geqslant N$, alors $|u_n| \leqslant 1 + |\ell| \leqslant M'$.

  Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par M'.

■

Exercice 45

Montrer que la suite $(-1)^n.n$ ne converge pas.

Remarque 46

Attention ! La réciproque est fausse ! Par exemple $(-1)^n$.

Proposition 47

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers un réel ℓ, et a tel que $\ell < a$. Alors $u_n < a$ apcr.

Démonstration

Supposons $\ell > a$.
Prenons $\varepsilon = \dfrac{\ell - a}{2}$.
Alors on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Soit alors $n \geqslant N$. Alors $\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$.
Donc
$$u_n \geqslant \ell - \varepsilon = \ell - \frac{\ell - a}{2} = \frac{\ell + a}{2} > \frac{a + a}{2} = a,$$
donc $\forall n \geqslant N,\ u_n > a$.
Donc $u_n > a$ à partir d'un certain rang. ■

Corollaire 48

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels qui converge vers un réel ℓ.

- si $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ àpcr,
- si $\ell < 0$, alors $u_n < 0$ àpcr.

Remarque 49

Il faut avoir des inégalités strictes. Par exemple, si $u_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ mais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de signe constant.

Corollaire 50

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente, ℓ sa limite. Alors $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |\ell|$.

Démonstration

- si $\ell = 0$, alors on a déjà démontré que $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- si $\ell > 0$, alors, par la proposition précédente, on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n > 0$.
  Soit $\varepsilon > 0$. Alors on dispose de N' tel que pour tout $n \geqslant N'$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
  Notons $N'' = \max(N, N')$. Soit $n \geqslant N''$. Alors, comme $u_n > 0$ et $\ell > 0$,
  $$\Big||u_n| - |\ell|\Big| = |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$
  Donc $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |\ell|$.
- si $\ell < 0$, alors, par la proposition précédente, on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n < 0$.
  Soit $\varepsilon > 0$. Alors on dispose de N' tel que pour tout $n \geqslant N'$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
  Notons $N'' = \max(N, N')$. Soit $n \geqslant N''$. Alors, comme $u_n > 0$ et $\ell > 0$,
  $$\Big||u_n| - |\ell|\Big| = |-u_n + \ell| = |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$
  Donc $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |\ell|$.

■

Exercice 51

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. On suppose de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

3 Méthodes de détermination de limites

3.1 Opérations sur les limites

Proposition 52 (Opérations sur les limites finies)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes, ℓ et ℓ' leurs limites respectives, λ et μ deux réels.

(i) La suite $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda\ell + \mu\ell'$.

(ii) La suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = \ell\ell'$.

(iii) Si $\ell \neq 0$ alors on dispose de N dans $\mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant, u_n \neq 0$, la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geqslant N}$ est

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

convergente et $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{\ell}$.

Démonstration

L'idée de ces preuves sera toujours la même : on essaie de d'abord faire des majorations en fonction de $|u_n - \ell|$ et $|v_n - \ell|$, puis on choisit notre N en fonction de la majoration que l'on a faite.

(i) On va séparer ce résultat en deux :

- convergence de $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}|u_n + v_n - (\ell + \ell')| &= |u_n - \ell + v_n - \ell'|\\ &\leqslant |u_n - \ell| + |v_n - \ell'|.\end{aligned}$$

Donc si on fait en sorte que $|u_n - \ell|$ et $|v_n - \ell|$ soient inférieurs ou égaux à ε', on aura gagné !
Prenons $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Par convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ, on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon'$.
Par convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ', on dispose de $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N'$, $|v_n - \ell'| \leqslant \varepsilon'$.
Posons $N'' = \max(N, N')$**.**
Soit $n \geqslant N''$. Alors

$$|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| \leqslant |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \leqslant \varepsilon' + \varepsilon' = 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donc $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell'$.

- convergence de $(\lambda v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Déjà, si $\lambda = 0$, la convergence est évidente. Ensuite, si $\lambda \neq 0$, on remarque que

$$|\lambda u_n - \lambda\ell| = |\lambda|.|u_n - \ell|$$

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Alors par convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ, on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon'$.
Soit $n \geqslant N$. Alors

$$|\lambda u_n - \lambda\ell| = |\lambda||u_n - \ell| = |\lambda|\varepsilon' = \varepsilon.$$

D'où la convergence de $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\lambda\ell$.

Donc, en combinant les deux résultats précédents, $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien vers $\lambda\ell + \mu\ell'$.

(ii) Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}|u_n v_n - \ell\ell'| &= |u_n v_n - \ell v_n + \ell v_n - \ell\ell'|\\ &\leqslant |u_n v_n - \ell v_n| + |\ell v_n - \ell\ell'|\\ &\leqslant |v_n|.|u_n - \ell| + |\ell|.|v_n - \ell'|.\end{aligned}$$

Or, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, donc $(|v_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par un réel M. Posons alors $M' = \max(M, |\ell|) + 1$. Alors $M' > 0$, $|\ell| \leqslant M'$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|v_n| \leqslant M'$.
Donc, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$|u_n v_n - \ell\ell'| \leqslant M'.|u_n - \ell| + M'.|v_n - \ell'|.$$

 nlaillet.math@gmail.com

Posons alors $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2M}$.
Par convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ, on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon'$.
Par convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ', on dispose de $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N'$, $|v_n - \ell'| \leqslant \varepsilon'$.
Posons $N'' = \max(N, N')$. Soit $n \geqslant N''$. Alors

$$|u_n v_n - \ell\ell'| \leqslant M'.\varepsilon' + M'.\varepsilon' = \varepsilon,$$

d'où la convergence de $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\ell\ell'$.

(iii) Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \neq 0$, $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, notons-le N.
Soit $n \geqslant N$. Alors

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|\ell - u_n|}{|u_n|.|\ell|}.$$

Or, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ donc $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |\ell| > 0$.
$|\ell| > \dfrac{|\ell|}{2}$ donc on dispose de $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N'$, $|u_n| > \dfrac{|\ell|}{2}$. Alors, pour tout $n \geqslant \max(N, N')$,

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|\ell - u_n|}{|\ell|.|u_n|} \leqslant 2\frac{|\ell - u_n|}{|\ell|^2}.$$

Posons $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon|\ell|^2}{2}$.
Alors on dispose de $N'' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N''$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon'$.
Posons $N''' = \max(N, N', N'')$. Soit $n \geqslant N'''$. Alors

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| &= \frac{2|\ell - u_n|}{|\ell|^2} \text{ car } n \geqslant N' \\ &\leqslant \frac{2\varepsilon'}{|\ell|^2} \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

D"où la convergence de $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\dfrac{1}{\ell}$.

■

Remarque 53

Attention, les réciproques des propositions précédentes sont fausses ! Par exemple, si pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^n$, alors $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (elle est constante égale à 0) mais aucune des deux suites ne converge.

Exercice 54

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $(u_n + v_n)$ et $(u_n - v_n)$ convergent.
Montrer que (u_n) et (v_n) convergent.

Proposition 55 (Règles de manipulation avec des limites infinies.)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Alors on a le tableau de convergence suivant

(i) somme :

v_n \ u_n	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**F.I.**
$-\infty$	$-\infty$	**F.I.**	$-\infty$

(ii) produit :

v_n \ u_n	$\ell \in \mathbb{R}_+^*$	$\ell \in \mathbb{R}_-^*$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \in \mathbb{R}_+^*$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \in \mathbb{R}_-^*$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	**F.I.**	**F.I.**
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**F.I.**	$-\infty$	$+\infty$

(iii) inverse :

u_n	$\ell \in \mathbb{R}^*$	0	$+\infty$	$-\infty$
	$1/\ell$	**F.I.**	0	0

Dans cette proposition le symbole **F.I.** signifie « Forme indéterminée » , c'est-à-dire que'on ne peut pas appliquer directement les règles classiques d'opérations sur les limites.

Démonstration

On ne va faire que quelques preuves.

(i) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, montrons que $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Soit $M \in \mathbb{R}$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc est bornée, et, en particulier, est minorée. Soit α un minorant de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Alors pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n + v_n \geqslant \alpha + v_n$.
Prenons $M' = M - \alpha$. $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ donc on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $v_n \geqslant M'$.
Soit $n \geqslant N$.
Alors $u_n + v_n \geqslant \alpha + M' = \alpha + M - \alpha = M$.
Donc $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(ii) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell < 0$, démontrons que $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
Soit $m < 0$.
$\ell < 0$ donc $\dfrac{\ell}{2} > \ell$, donc, comme $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $v_n < \dfrac{\ell}{2}$.

...au brouillon...

L'idée est alors que si $u_n > M$, $u_n v_n \leqslant \dfrac{M\ell}{2}$. il faut donc $\dfrac{M\ell}{2} \leqslant m$, i.e. $M \geqslant \dfrac{m2}{\ell}$.

Posons $M = \dfrac{2m}{\ell} > 0$. Alors, par divergence vers $+\infty$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dispose de $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant M$.
Posons $N'' = \max(N, N')$.

Soit $n \geqslant N''$. Alors $u_n \geqslant M'$ et $v_n < \dfrac{\ell}{2} < 0$. Alors

$$u_n v_n < \frac{M\ell}{2} = m.$$

donc $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

■

Proposition 56

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite **bornée** et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de limite nulle. Alors

$$u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc on dispose de $A > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant A$.
Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n v_n| \leqslant A.|v_n|$.
Posons $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{A}$.
Alors on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leqslant \varepsilon'$.
Alors $\forall n \geqslant N,\ |u_n v_n| \leqslant A\varepsilon' = \varepsilon$.
D'où le résultat. ■

Proposition 57 (Limites et inverse)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels non nuls tendant vers 0.

(i) si u_n est de signe constant apcr, $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, suivant le signe.

(ii) sinon, $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exemple 58

$\left(\dfrac{1}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ mais $(-2)^n$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Une question naturelle est alors de savoir comment « déterminer » les formes indéterminées, qui sont au nombre de trois (ou cinq, selon qu'on met ensemble ou pas trois FI équivalentes) : $\infty - \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ (équivalent à $\dfrac{0}{0}$ et $0 \times \infty$), et 1^∞.

Point de méthode 59

Quelques méthodes de déterminations de limites de formes indéterminées.

(i) Limites des suites géométriques. Si $\rho \in \mathbb{R}$,

$$\rho^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty \text{ si } \rho > 1 \\ 1 \text{ si } \rho = 1 \\ 0 \text{ si } |\rho| < 1 \end{cases}$$

Si $\rho < -1$, $(\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite et n'est pas bornée. Si $\rho = -1$, $(\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite mais est bornée.

(ii) Limite d'un polynôme : la limite d'un polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$ est égale à la limite de son coefficient dominant.
Exemple : déterminer $\lim\limits_{n\to-\infty} \dfrac{n-n^2-2n^3}{n^3+4n+2}$.

(iii) Limites incluant des racines carrées : penser à utiliser la quantité conjuguée.
Exemple : déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

(iv) Penser à reconnaître des taux de variation, et donc des dérivées.
Exemple : déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

(v) Cas 1^∞ : penser à écrire $a^b = \mathrm{e}^{b\ln(a)}$, et utiliser la proposition qui suit.
Exemple : limite de $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, de $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$.

La proposition suivante ne sera pas prouvée car on n'a pas encore parlé de limites de fonctions (on peut toutefois un peu deviner à quoi cela va correspondre).

Proposition 60 (Limites et composition de fonctions)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers une limite ℓ de $\overline{\mathbb{R}}$, f une fonction telle que

$$\lim_{x\to\ell} f(x) = \ell',\ \ \ell' \in \mathbb{R}.$$

Alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ'.

3.2 Limites et inégalités

Proposition 61 (Passage à la limite dans les inégalités)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergeant respectivement vers des réels ℓ et ℓ'.
Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \leqslant \ell'$.

Démonstration

Soit N tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n$.
Si on avait $\ell > \ell'$.
Prenons $\varepsilon = \dfrac{\ell-\ell'}{3}$. Alors, en particulier, $\ell'+\varepsilon < \ell-\varepsilon$.
Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, on dispose de $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N'$, $\ell-\varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell+\varepsilon$.
Comme $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$, on dispose de $N'' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N''$, $\ell'-\varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell'+\varepsilon$.
Soit $n \geqslant \max(N, N', N'')$. Alors

$$u_n \geqslant \ell-\varepsilon > \ell'+\varepsilon \geqslant v_n.$$

Donc $\forall n \geqslant \max(N, N', N'')$, $u_n > v_n$, ce qui contredit le fait que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Absurde, donc $\ell \leqslant \ell'$. $\blacksquare$

Remarque 62

(i) Attention, les inégalités strictes ne passent pas à la limite ! Exemple de $1-\dfrac{1}{n}$ et $1+\dfrac{1}{n}$.

(ii) Attention, la réciproque de l'inégalité précédente est fausse ! Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, on n'a pas la garantie que $u_n \leqslant v_n$ àpcr.

Proposition 63

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles.

(i) (Théorème de majoration) Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

(ii) (Théorème de majoration) Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(iii) (Théorème d'encadrement) Si $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang, si $\ell \in \mathbb{R}$, si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Démonstration

(i) Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n$.
Soit $m \in \mathbb{R}$. On dispose de $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N'$, $v_n \leqslant m$.
Alors si $N'' = \max(N, N')$, pour tout $n \geqslant N''$, $u_n \leqslant v_n \leqslant m$.
Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

(ii) Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n$.
Soit $M \in \mathbb{R}$. On dispose de $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N'$, $u_n \geqslant M$.
Alors si $N'' = \max(N, N')$, pour tout $n \geqslant N''$, $v_n \geqslant u_n \geqslant M$.
Donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(iii) Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$,

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$$

Soit $\varepsilon > 0$.
Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, on dispose de $N' \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant N'$, $\ell-\varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell+\varepsilon$.
Comme $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, on dispose de $N'' \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant N''$, $\ell-\varepsilon \leqslant w_n \leqslant \ell+\varepsilon$.
Posons $N''' = \max(N, N', N'')$. Soit $n \geqslant N'''$. Alors

$$\ell-\varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant \ell+\varepsilon,$$

donc $\ell-\varepsilon \leqslant w_n \leqslant \ell+\varepsilon$, i.e. $|w_n-\ell| \leqslant \varepsilon$.
Donc $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

■

Remarque 64

(i) On utilise souvent implicitement le théorème d'encadrement pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, en écrivant $|u_n| \leqslant v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(ii) Plus généralement, pour montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, on montre, par majoration de $|u_n-\ell|$, que $|u_n-\ell| \to 0$.

(iii) La meilleure manière, en termes de rédaction, d'utiliser les théorèmes précédents est d'écrire « par majoration » , « par minoration » ou « par encadrement ». Éviter d'écrire le « théorème de l'encadrement », qui n'est pas très élégant.

Exemple 65 (Une limite très importante !)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que $\dfrac{x^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 66

Démontrer que $\dfrac{1}{\ln(n)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

3.3 Monotonie et limites

Proposition 67

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente, ℓ sa limite.

(i) si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell$.

(ii) si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \ell$.

Démonstration

On ne montre que le premier point ! Par l'absurde, si $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > \ell$, alors pour tout $n \geqslant N$, $u_n - \ell \geqslant u_N - \ell > 0$.
En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $0 \leqslant u_N - \ell > 0$, **absurde !** ∎

Proposition 68 (Théorème de la limite monotone)

(i) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite monotone. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite (finie ou pas).

(ii) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante. Alors

- ou bien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie.
- ou bien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée et alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(iii) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante. Alors

- ou bien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée et alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie.
- ou bien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée et alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration

On se place dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

- si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, soit $M \in \mathbb{R}$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geqslant M$.
  Soit $n \geqslant N$. Par croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_n \geqslant u_N \geqslant M$.
  Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, soit $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Alors A est une partie non vide de $\mathbb{R}$, majorée, donc **elle admet une borne supérieure.** Notons-la $|ell$.
  Soit $\varepsilon > 0$.
  Comme $\ell = \sup(A)$, on dispose de $x \in A$ tel que $\ell - \varepsilon \leqslant x \leqslant \ell$.
  Donc on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \varepsilon \leqslant u_N \leqslant \ell$.
  Soit $n \geqslant N$. Par croissance de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $u_n \geqslant u_N \geqslant \ell - \varepsilon$.
  Mais comme $u_n \in A$, $u_n \leqslant \ell$, donc
  $$\ell - \varepsilon \leqslant u_N \leqslant \ell \leqslant \ell + \varepsilon, \text{ i.e. } |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$
  Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

■

Remarque 69

Ne jamais dire que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée, elle tend vers « son » majorant : cela ne veut rien dire ! Ainsi, $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, majorée par $21324\pi + 2e$, mais ne converge pas vers $21324\pi + 2e$.

Exemple 70

(i) **Étude de suites récurrentes.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par $u_0 > 0$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + u_n^2$. Démontrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Démonstration

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geqslant 0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Donc, par le théorème de la limite monotone, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$.
Alors $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $u_n + u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell^2$. Mais, comme pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + u_n^2$, on en déduit, par unicité de la limite, que $\ell = \ell + \ell^2$, donc $\ell^2 = 0$, donc $\ell = 0$. Ceci est absurde car $u_0 > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. ■

(ii) Démontrer que si $\alpha > 1$ et $n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{n^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{\alpha - 1}\left(\dfrac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$, et en déduire que $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

- Déjà, comme $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est décroissante, pour tout $n \geqslant 2$, pour tout t dans $[n-1, n]$, $\dfrac{1}{n^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{t^\alpha}$. Donc, en intégrant l'inégalité précédente entre $n-1$ et n,
  $$\int_{n-1}^{n} \frac{1}{n} dt \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^\alpha} dt,$$

 nlaillet.math@gmail.com

donc
$$\frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right).$$

- On note, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.
  - pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} \geqslant 0$, donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
  - soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \\ &\leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right) \\ &\leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1}\sum \frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}} \\ &\leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{1^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée : elle converge donc.
Sa limite **n'est pas** $1 + \frac{1}{\alpha-1}$. Par exemple, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6} \neq 2$.

Exercice 71

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers monotone. Discuter de la convergence ou pas de (u_n).

Définition 72

Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre est décroissante, et $\lim_{n\to+\infty} |u_n - v_n| = 0$.

Proposition 73

Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

Démonstration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante telle que $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(i) On montre que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$. Si ce n'était pas le cas, on disposerait de $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > v_N$. Alors, par croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et par décroissance de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout $n \geqslant N$,
$$u_n - v_n \geqslant u_N - v_N > 0,$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

contradiction avec le fait que $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.

(ii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par v_0.
Donc, par le théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.

(iii) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $v_n \geqslant u_n \leqslant u_0$, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par u_0.
Donc, par le théorème de la limite monotone, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ'.

(iv) Enfin, $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - \ell'$ donc, par unicité de la limite $\ell - \ell' = 0$, i.e. $\ell = \ell'$.

■

Exemple 74

(i) On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $T_n = S_n + \frac{1}{n}$. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

- pour tout n dans $\mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$, donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,
- soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= S_{n+1} + \frac{1}{n+1} - \left(S_n + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) \leqslant 0, \end{aligned}$$

  donc $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $T_n - S_n = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

donc (S_n) et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, donc elles convergent vers une même limite.

(ii) Soit (u_n) une suite de réels décroissante et de limite nulle.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k.$$

Montrer que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

3.4 Brève extension au monde complexe

Définition 75

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ si $|u_n - \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ceci revient à dire que $\mathfrak{Re}(u_n) \underset{n\to+\infty\to\mathfrak{Re}}{\longrightarrow} (\ell)$ et $\mathfrak{Im}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathfrak{Im}(\ell)$.

Remarque 76

(i) Cela n'a pas de sens de parler de limite infinie pour des suites complexes.

(ii) Toutes les propriétés qui n'ont pas besoin de relation d'ordre sont vraies dans $\mathbb{C}$.

(iii) En revanche, les questions de monotonie, d'encadrement, n'ont pas de sens.

Exemple 77

Ainsi, $\dfrac{j^n}{n+2+i} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car

$$\left|\frac{j^n}{n+2+i}\right| = \frac{1}{\sqrt{(n+2)^2+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4 Suites extraites

Dans l'exemple 74-(ii), on n'a pas réussi à conclure... que manquait-il ? L'étude des suites dites **extraites**

Définition 78

(i) Une extractrice/extraction est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante.

(ii) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Une suite extraite ou sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ extraction telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$.

Exemple 79

(i) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, alors

- $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- si $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_0$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **n'est pas** une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) si $u_n = j^n$, alors $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, constante, égale à 1.

Remarque 80 (Remarque importante !)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ avec φ extraction.
Si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors

$$(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$$

avec ψ extraction. Donc pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$w_n = v_{\psi(n)} = u_{\varphi\circ\psi(n)},$$

et $\varphi \circ \psi$ est une extraction donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Attention notamment à l'ordrte de composition des extractions.

Lemme 81

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extraction. Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geqslant n$.

Démonstration

On le démontre par récurrence. L'initialisation est immédiate puisque $\varphi(0) \geqslant 0$.
L'hérédité aussi car si $\varphi(n) \geqslant n$, $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geqslant n$, donc $\varphi(n+1) > n$ donc $\varphi(n+1) \geqslant n+1$.
■

Proposition 82

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
Alors toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite ℓ.
La propriété s'étend aux suites complexes pour des limites finies.

Démonstration

On ne fait que le cas où $\ell \in \mathbb{R}$, les autres cas s'adaptent.
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, φ une extraction telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On dispose alors de $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $n \geqslant N$. Alors, par le lemme, $\varphi(n) \geqslant n \geqslant N$, donc

$$|u_{\varphi(n)} - \ell| \leqslant \varepsilon,\ \text{ i.e. } |v_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. ■

Point de méthode 83

Pour montrer qu'une suite n'a pas de limite, il suffit de trouver deux sous-suites de cette suite qui ont des limites différentes (ou une sous-suite qui n'a pas de limite).
Par exemple si pour tout n, $u_n = (-1)^n$, alors $u_{2n} = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $u_{2n+1} = -1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Proposition 84

Soit (u_n) une suite telle que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers la même limite ℓ. Alors (u_n) tend vers ℓ.

Remarque 85

On peut étendre cette propriété à toute partition de $\mathbb{N}$ en un nombre fini de parties infinies. Par exemple, si $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers la même limite ℓ, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.

 nlaillet.math@gmail.com

Démonstration

On ne s'intéresse qu'au cas convergent, les autres s'adaptent.
Soit $\varepsilon > 0$.
$u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ donc on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $|u_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon$
$u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ donc on dispose de $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N'$, $|u_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$
Posons $N'' = \max(2N, 2N'+1)$.
Soit $n \geqslant N''$

- si n est pair, alors $n \geqslant 2N$, et $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$. Alors $p \geqslant N$ donc $|u_{2p} - \ell| \leqslant \varepsilon$. donc $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
- si n est impair, alors $n \geqslant 2N'+1$, et $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$. Alors $p \geqslant N'$ donc $|u_{2p+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$. donc $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. ■

Exemple 86

On peut alors finir l'exercice sur les séries alternées !

Point de méthode 87 (Construction d'extractions)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne convergeant pas vers ℓ. Démontrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|v_n - \ell| > \varepsilon$.
On commence par nier la convergence :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N,\ |u_n - \ell| > \varepsilon.$$

Il faut alors **construire une extraction** φ, par récurrence.

- En prenant $N = 0$, on dispose de $n \geqslant N$ tel que $|u_n - \ell| > \varepsilon$. On pose $\varphi(0) = n$.
- Supposons $\varphi(0), \dots, \varphi(k)$ construits pour un certain k.
  En prenant $N = \varphi(k) + 1$, on dispose de $n \geqslant \varphi(k) + 1$ tel que $|u_n - \ell| > \varepsilon$. On pose alors $\varphi(k+1) = n$.

On a alors construit φ une extraction (strictement croissante par construction) telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|u_{\varphi(n)} - \ell| > \varepsilon$.

Exercice 88

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non majorée. Démontrer que

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists k \geqslant N,\ u_k > M.$$

puis qu'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$.

Théorème 89 (Bolzano-Weierstrass)

Toute suite réelle bornée admet une suite extraite convergente.

Démonstration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée, a et b un minorant et un majorant de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On construit par récurrence une suite de segments $[a_n, b_n]$ qui vont tous contenir une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La construction se fera par **dichotomie**.

- On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Alors $[a_0, b_0]$ contient une infinité de termes de la suite.
- Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que (a_n, b_n) soient construits et tel que $[a_n, b_n]$ contienne une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$. Alors
  - ou bien $[a_n, c_n]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on pose $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c_n$,
  - ou bien $]c_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on pose $a_{n+1} = c_n$, $b_{n+1} = b_n$.

  On a donc construit (a_{n+1}, b_{n+1}) tels que $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ contienne une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On remarque que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, et convergent vers la même limite ℓ.
On construit alors φ ainsi :

- $\varphi(0) = 0$, i.e. $u_{\varphi(0)} = u_0$,
- si $n \in \mathbb{N}$, et si $\varphi(n)$ a été construit, on remarque que l'ensemble

$$A_n = \{k \in \mathbb{N},\ k > \varphi(n) \text{ et } u_k \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\}$$

  est infini (sinon, s'il était fini, $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ contiendrait un nombre fini de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, absurde. On prend $\varphi(n+1) \in A_n$.

On a alors construit une extractrice φ telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$.
Donc, par encadrement, $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. ■

Exercice 90 (Difficile mais joli)

Démontrer que de toute suite réelle on peut extraire une sous-suite convergente. En déduire une autre preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass.

Remarque 91

On peut aussi énoncer ce théorème comme « Toute suite réelle bornée admet une valeur d'adhérence » , une *valeur d'adhérence* étant définie comme la limite d'une suite extraite.

Proposition 92

Toute suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une suite extraite convergente.

Démonstration

Notons, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $a_n = \mathfrak{Re}(u_n)$ et $b_n = \mathfrak{Im}(u_n)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$|a_n| \leqslant |u_n| \text{ et } |b_n| \leqslant |u_n|$$

Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées.
On ne va pas extraire séparément des suites convergentes, mais extraire une suite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, puis de* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on dispose de $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ extraction, de $\ell \in \mathbb{R}$ telle que $a_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
$\boxed{(b_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}}$ est bornée, donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on dispose de $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ extraction, de $\ell' \in \mathbb{R}$ telle que $b_{\varphi\circ\psi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$.
Mais $(a_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(a_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ donc converge vers ℓ.
Donc

$$u_{\varphi\circ\psi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + i\ell'.$$

Donc $(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge. ■

Exercice 93

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée n'ayant qu'une valeur d'adhérence. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5 Caractérisation séquentielle des propriétés de $\mathbb{R}$.

Maintenant que nous avons bien manipulé les suites, il est très utile de voir comment les propriétés de $\mathbb{R}$ peuvent être vues à l'aides de ces suites.

Proposition 94

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors A est majorée si et seulement si

$$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée.}$$

La proposition fonctionne de la même manière dans les cas minoré et borné.

Remarque 95

On utilise souvent la contraposée : A n'est pas majoré si et seulement s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}$ telle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

Démonstration

La démonstration est intéressante en ce sens qu'elle fait construire une suite.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si A est majorée, prenons M un majorant de A. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$.
Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.
Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par M.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si A n'est pas majorée, alors

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists a \in A,\ a > M.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans la proposition précédentes, prenons $M = n$.
Alors on dispose de $a \in A$ tel que $a > M$. Notons $u_n = a$.

On a donc construit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in A \text{ et } u_n > n.$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $A^{\mathbb{N}}$ non majorée. D'où l'implication réciproque par contraposée.

■

Remarque 96

En fait, on a démontré que si A n'était pas majorée, alors il existait une suite d'éléments de A tendant vers $+\infty$.

Proposition 97

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}$.

(i) M est la borne supérieure de A si et seulement si

$$\forall x \in A,\ x \leqslant M \textbf{ ET } \exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \text{ t.q. } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M.$$

(ii) M est la borne inférieure de A si et seulement si

$$\forall x \in A,\ x \geqslant M \textbf{ ET } \exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \text{ t.q. } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M.$$

Démonstration

(i) On utilise la caractérisation suivante de $M = \sup(A)$:

$$\forall x \in A,\ x \leqslant M \text{ et } \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ |a - M| \leqslant \varepsilon.$$

- On suppose que $M = \sup(A)$. Alors déjà, $\forall x \in A,\ x \leqslant M$.
  Ensuite, on construit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers M.
  Soit $n \in \mathbb{N}$. Prenons $\varepsilon = \dfrac{1}{2^n}$ (peu importe ce que l'on prend, l'important est que la quantité tende vers 0 quand n tend vers $+\infty$).
  Alors on dispose de $a \in A$, $\boxed{\textbf{DÉPENDANT DE } n}$ tel que $|a - M| \leqslant \varepsilon$.
  Posons $u_n = a$. Alors $|u_n - M| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.
  On a donc défini une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - M| \leqslant \frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

  Donc $|u_n - M| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$.
- Supposons maintenant que $\forall x \in A,\ M \leqslant x$ et que l'on dispose de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$.
  Soit $\varepsilon > 0$. $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$ donc on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ |u_n - M| \leqslant \varepsilon$.
  Posons $A = u_N$. Alors $a \in A$ et $|a - M| \leqslant \varepsilon$.
  D'où l'implication réciproque et l'équivalence.

■

Exemple 98

Appliquer la proposition suivante à la détermination de la borne supérieure de

$$A = \left\{ \frac{q}{2^p + q}, (p, q) \in \mathbb{N}^2 \right\}.$$

Proposition 99

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. A est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si tout réel est la limite d'une suite d'éléments de A.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose A dense dans $\mathbb{R}$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ |x - a| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.
On construit une suite qui converge vers x.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Prenons $\varepsilon = \dfrac{1}{2^n}$. Alors on dispose de $a \in A$ **dépendant de** ε **donc de** n tel que $|x - a| \leqslant \varepsilon$.
Posons $u_n = a$.
On a donc construit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout n, $|u_n - x| \leqslant \dfrac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit x dans $\mathbb{R}$. Alors on dispose de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors par convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers x, on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $|u_n - x| \leqslant \varepsilon$.
Posons $a = u_N$. Alors $a \in A$ et $|a - x| \leqslant \varepsilon$.
Donc A est dense dans $\mathbb{R}$.

D'où l'équivalence désirée. ■

Exemple 100

On obtient une nouvelle démonstration de la densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

- **Densité de $\mathbb{Q}$.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ et, si $n \in \mathbb{N}^*$,

  $$nx - 1 \leqslant \lfloor nx \rfloor \leqslant nx,$$

  donc

  $$x - \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant x,$$

  donc, par encadrement, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.

- **Densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.** Soit $x \in \mathbb{R}$.
  — si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on pose, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = x$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

- si $x \in \mathbb{Q}$, on pose, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = x + \frac{\sqrt{2}}{n}$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.

6 Suites récurrentes

6.1 Rappels de Terminale

Définition 101

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est dite **arithmétique** s'il existe r dans $\mathbb{K}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
r est appelé *raison* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 102

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.

(i) pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

(ii) pour tous n et p dans $\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=n}^{p} u_k = \frac{(u_n + u_p)(p-n+1)}{2} = \frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme}) \times (\text{nb de termes})}{2}.$$

Proposition 103

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison **réelle** r.

(i) si $r = 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et a pour limite u_0 (cette partie de la proposiiton fonctionne aussi avec des suites réelles).

(ii) si $r > 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et a pour limite $+\infty$.

(iii) si $r < 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et a pour limite $-\infty$.

Définition 104

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est dite **géométrique** s'il existe q dans $\mathbb{K}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$.
q est appelé *raison* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 105

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q.

(i) pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.

(ii) pour tous n et p dans $\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=n}^{p} u_k = \begin{cases} u_0 \times (p-n+1) \text{ si } q = 1 \\ u_n \times \dfrac{1-q^{p-n+1}}{1-q} = (\text{premier terme}) \times \dfrac{1-(\text{raison})^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}} \text{ sinon.} \end{cases}$$

Proposition 106

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme et de raison **réelle** q.

(i) si $u_0 = 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle.

(ii) si $u_0 > 0$:

	Variations	Limite
$r > 1$	Strictement croissante	$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
$0 < r < 1$	Strictement décroissante	$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
$r = 0$	Constante nulle pour $n \geqslant 1$	
$-1 < r < 0$	Pas monotone : $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ str. décroissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ str. croissante	
$r < -1$	Pas monotone : $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ str. croissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ str. décroissante	Pas de limite : $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

(iii) si $u_0 < 0$:

	Variations	Limite
$r > 1$	Strictement décroissante	$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$
$0 < r < 1$	Strictement croissante	$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
$r = 0$	Constante nulle pour $n \geqslant 1$	
$-1 < r < 0$	Pas monotone : $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ str. croissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ str. décroissante	
$r < -1$	Pas monotone : $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ str. décroissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ str. croissante	Pas de limite : $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Proposition 107

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique **complexe** de raison $q \in \mathbb{C}$.

(i) si $|q| < 1$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(ii) si $|q| > 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

7 Un peu d'asymptotique

7.1 Négligeabilité, domination, équivalences

Définition 108

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que (v_n) ne s'annule pas àpcr.

(i) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on écrit $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et on lit « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un « petit o de » $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ » si $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(ii) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on écrit $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et on lit « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un « grand o de » $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ » si $\dfrac{u_n}{v_n}$ est bornée.

(iii) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on écrit $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} o(v_n)$ et on lit « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ » si $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exemple 109

$n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^2)$, $1 \underset{n\to+\infty}{=} o(n^2)$, $n-1 \underset{n\to+\infty}{=} o(n^2)$, $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, etc.

Remarque 110

Attention, $o(v_n)$ n'est pas un objet à manipuler comme une suite ! Notamment, si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $r_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, $u_n - r_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$!

Il faut pouvoir écrire dans un cadre plus général ces définitions

Définition 111

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

(i) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on écrit $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et on lit « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un « petit o de » $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ » s'il existe $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$ àpcr.

(ii) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on écrit $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et on lit « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un « grand o de » $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ » s'il existe $C > 0$ tel que $|u_n| \leqslant C|v_n|$ à partir d'un certain rang.

(iii) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on écrit $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} o(v_n)$ et on lit « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ » s'il existe $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite égale à 1 telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$ àpcr.

On ne démontrera pas que ces définitions sont équivalentes.
Question : **pourquoi** introduire ces notions ? Pour la raison **fondamentale** suivante :

Proposition 112

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Démonstration

Opérations sur les limites ! ■

Remarque 113

(i) Ainsi, faire des équivalents permet de plus facilement déterminer des limites.

(ii) La réciproque est très fausse ! Deux suites peuvent avoir la même limite sans être équivalentes ! Ainsi, $\frac{1}{n}$ et $\frac{2}{n}$ ont la même limite mais ne sont pas équivalentes.

On a quand même la proposition sympathique suivante

Proposition 114

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, $\ell \in \mathbb{R}^*$. Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ si et seulement si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$.

Remarque 115

Que signifie « $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$ » ?

Bon, mais alors, à quoi servent les petits o et les grand O ?

Proposition 116

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n).$$

Proposition 117 (Quelques propriétés des équivalents, o, O)

(i) $\sim$ est une relation d'équivalence.

(ii) o et O sont des relations transitives.

(iii) $o \Rightarrow O$ et $\sim \Rightarrow O$

(iv) si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$, alors pour tous λ et μ, $\lambda u_n + \mu v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.

(v) idem avec O

(vi) si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$. Pareil avec O et $\sim$.

(vii) en particulier, si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim x_n$, alors $u_n w_n \sim v_n x_n$.

7.2 Relations de comparaison et équivalents célèbres

Proposition 118

(i) Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$, $n^a = o(n^b)$.

(ii) Pour tous a et b strictement positifs, $n^a = o(e^{bn})$ et $\ln(n)^a = o(n^b)$.

(iii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^n \underset{n \to +\infty}{=} o(n!)$ et $n! \underset{n \to +\infty}{=} o(n^n)$.

(iv) **Plus généralement**, si $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $u_n^a = o(\mathrm{e}^{bu_n})$ et $\ln(u_n)^a = o(u_n^b)$.