MPSI1 – Programme de colles
Semaine 06 – du 10 au 14 novembre 2025

Primitives et équations différentielles linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Calcul de primitives	
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue f, $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée f. On pourra noter $\int^{x} f(t)\mathrm{d}t$ une primitive générique de f.
Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.	Primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$.
Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.
Intégration par parties, changement de variable.	Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

Nombres réels et suites numériques

Contenus	Capacités & commentaires
a) Ensembles de nombres usuels	
Entiers naturels, relatifs, nombres décimaux, rationnels, réels, irrationnels.	Les constructions des ensembles de nombres usuels (et en particulier celle de $\mathbb{R}$) sont hors programme.
Approximations décimales d'un réel.	Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès.
Tout intervalle ouvert non vide rencontre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.	
b) Propriété de la borne supérieure	
Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$. Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure). Les intervalles sont les parties de $\mathbb{R}$ des 9 types auxquels on pense. Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leqslant b$, $[a, b] \subset X$.	Notations $\sup X$, $\inf X$.

Exemples de questions de cours

1. Formule d'IPP, formule de changement de variables.
2. Intégrale d'une fonction paire/impaire sur un intervalle symétrique.
3. Intégrale d'une fonction périodique sur une période.
4. Primitive de $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$.
5. Soit $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n dt$. Déterminer pour tout entier n une relation entre W_n et W_{n+2}.
6. Définition epsilonesque de la borne supérieure.
7. Soit X une partie de $\mathbb{R}$ telle que pour tous $x,\ y \in X$ tels que $x \leqslant y$, $[x, y] \subset X$. La colleuse/le colleur choisir une configuration (X est majorée non minorée, $\sup(X) \in X$ par exemple) et l'élève montre que X est de la bonne forme (dans mon exemple, $]-\infty, a]$).
8. Définitions équivalentes de la densité.
9. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
10. $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.