

MPSI 1

Mathématiques DS 03

Samedi 8 novembre – 8h-12h

- Durée : 4 heures :
 - Prenez **10 minutes** pour lire le sujet en entier et décider de la stratégie que vous adopterez.
 - Prenez **10 minutes** au moins à la fin des 4 heures pour vous relire !
- Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
- Le sujet est composé de deux problèmes.
- Le sujet est **très long** : il **ne faut pas** essayer de tout faire. Un sujet long vous permet de **choisir** ce qui vous inspire le plus. Repérez les questions indépendantes, les parties indépendantes des autres, etc.
- **Encadrez, soulignez vos résultats et numérotez vos pages.**
- À tout moment, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour pouvoir continuer : il suffit de le préciser clairement sur la copie.
- Si vous voyez ce qui semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur la copie.
- Essayez de changer de copie, au moins de page, lorsque vous changez d'exercice.
- Laissez de la place dans une marge à gauche pour pouvoir noter plus facilement le devoir.
- Une réponse fausse, si elle ne laisse pas paraître de calculs intermédiaires, compte 0 points ; avec calculs intermédiaires elle peut rapporter quelques points.

♪ Bon courage ! ♪

Problème 1. Étude du mouvement d'une particule plane

On considère une particule se déplaçant dans un plan, de position décrite par deux fonctions de t , x et y . On note $z = x + iy$ (z est donc une fonction de t).

On suppose qu'il existe une fonction continue $\theta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, telle que pour tout t dans $\mathbb{R}$,

$$x'(t) = \cos(\theta(t)) \text{ et } y'(t) = \sin(\theta(t)).$$

On suppose de plus que $z(0) = 0$, c'est-à-dire que la particule se trouve au point $(0, 0)$ lorsque $t = 0$.

Si $t \geq 0$, on appelle $M(t)$ le point d'affixe $z(t)$. On appelle $\vec{v}(t)$ le vecteur d'affixe $z'(t)$.

On appelle enfin **trajectoire** de la particule l'ensemble $\{M(t), t \in \mathbb{R}_+\}$. Par exemple, si pour tout $t \geq 0$, $x(t) = 3t$ et $y(t) = 5t$, alors pour tout $t \geq 0$, $y(t) = \frac{5}{3}x(t)$, donc la trajectoire de la particule est une demi-droite partant de 0 et de pente $\frac{5}{3}$.

Ainsi, étant donnée les formules précédentes, on a les résultats suivants : pour tout t dans $\mathbb{R}_+$,

$$x(t) = \int_0^t \cos(\theta(u)) du, \quad y(t) = \int_0^t \sin(\theta(u)) du, \quad z(t) = \int_0^t e^{i\theta(u)} du.$$

A. Un tout premier exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que l'on dispose de $\omega > 0$ tel que pour tout t dans $\mathbb{R}_+$, $\theta(t) = \omega t$.

1. Déterminer une expression de $x(t)$ et de $y(t)$.

Correction

On sait alors que pour tout t dans $\mathbb{R}$,

$$x(t) = \int_0^t \cos(\omega u) du = \left[\frac{1}{\omega} \sin(\omega u) \right]_0^t = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \text{ et } y(t) = \int_0^t \sin(\omega u) du = \frac{1}{\omega} (1 - \cos(\omega t))$$

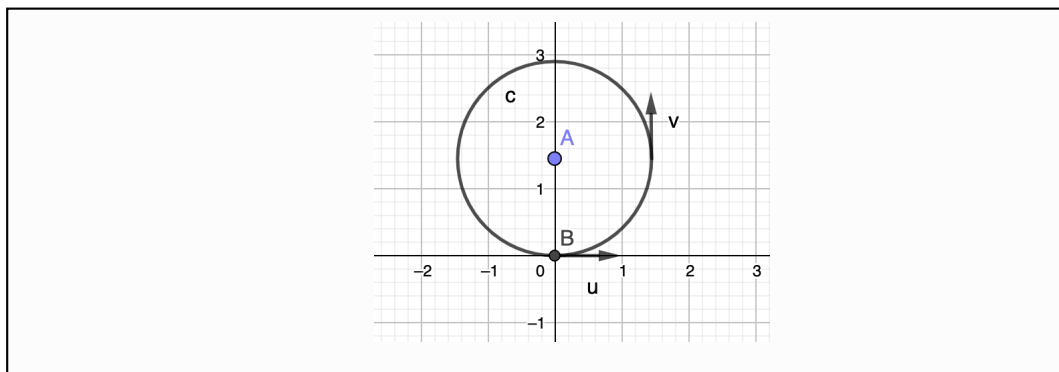
2. Démontrer que la fonction $t \mapsto x(t)^2 + \left(y(t) - \frac{1}{\omega}\right)^2$ est constante. Représenter l'ensemble des valeurs de $(x(t), y(t))$ pour t variant dans $\mathbb{R}$. Représenter aussi les vecteurs $\vec{v}(0)$ et $\vec{v}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)$.

Correction

On remarque assez aisément que si $t \in \mathbb{R}$,

$$x(t)^2 + \left(y(t) - \frac{1}{\omega}\right)^2 = \frac{1}{\omega^2} (\sin(\omega t)^2 + \cos(\omega t)^2) = \frac{1}{\omega^2},$$

donc le point $(x(t), y(t))$ appartient au cercle de centre $\left(0, \frac{1}{\omega}\right)$ et de rayon $\frac{1}{\omega}$. On dessine les choses ainsi.



B. Une première fonction θ

Dans cette partie, on suppose que pour tout t dans $\mathbb{R}_+$, $\theta(t) = \text{Arctan}(t)$. Ne demandez pas le sens physique de cette propriété (ou demandez-le à M. Lim, mais pas à moi).

3. Représenter le graphe de θ sur $\mathbb{R}_+$. Préciser les asymptotes éventuelles et la tangente en 0.

Correction

Je vous avais promis du cours, en voici !

4. Si $t \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(\text{Arctan}(t))$ et $\sin(\text{Arctan}(t))$ en fonction de t .

Correction

C'est un des exercices corrigés en classe !

On sait que $\frac{1}{\cos(\text{Arctan}(t))^2} = 1 + \tan(\text{Arctan}(t))^2 = 1 + t^2$, donc

$$\cos(\text{Arctan}(t))^2 = \frac{1}{1 + t^2}.$$

Mais Arctan est à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos(\text{Arctan}(t)) \geq 0$. Ainsi,

$$\cos(\text{Arctan}(t)) = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

On en déduit que

$$\sin(\text{Arctan}(t)) = \cos(\text{Arctan}(t)) \times \tan(\text{Arctan}(t)) = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

5. Démontrer que la fonction sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et donner l'expression, à l'aide des fonctions usuelles, de sa bijection réciproque. On appellera cette bijection réciproque Argsh .

Correction

Là, on ne veut pas juste de théorème de la bijection, mais la résolution d'une équation !

Soit y dans $\mathbb{R}$ et x dans $\mathbb{R}$. Alors on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}(x) = y &\Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2y \\ &\Leftrightarrow (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0.\end{aligned}$$

L'équation $X^2 - 2yX - 1 = 0$ d'inconnue X admet pour discriminant $4y^2 + 4$, d'où deux solutions, l'une positive, $y + \sqrt{y^2 + 1}$, l'autre négative, $y - \sqrt{y^2 + 1}$. Comme e^x est toujours positive, on a l'équivalence

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}(x) = y &\Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).\end{aligned}$$

Ainsi, sh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et sa bijection réciproque est

$$y \mapsto \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

6. Démontrer que Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa dérivée.

Correction

Ou bien on utilise la dérivée d'une réciproque, ou bien on utilise l'expression trouvée.

La dérivée de sh , ch , ne s'annule jamais, donc Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$\operatorname{Argsh}' : y \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh}(y))}$$

Or, si $y \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh}(y)) = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(\operatorname{Argsh}(y))} = \sqrt{1 + y^2}$ (car ch est toujours positif). Donc

$$\operatorname{Argsh}' : y \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$$

7. En déduire une expression de $x(t)$ et de $y(t)$ pour tout t dans $\mathbb{R}_+$.

Correction

On en déduit que pour t dans $\mathbb{R}_+$,

$$x(t) = \int_0^t \cos(\operatorname{Arctan}(u)) du = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} du = \operatorname{Argsh}(t)$$

et

$$y(t) = \int_0^t \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} du = \left[\sqrt{1 + u^2} \right]_0^t = \boxed{\sqrt{1 + t^2} - 1}$$

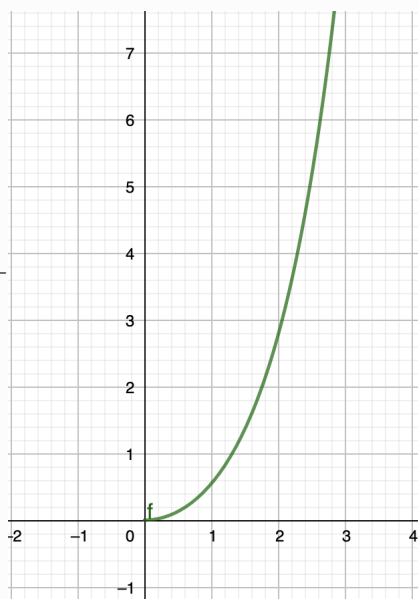
8. Démontrer que pour tout t dans $\mathbb{R}$, $y(t) = \operatorname{ch}(x(t)) - 1$. Dessiner alors la trajectoire de la particule.

Correction

Soit t dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\operatorname{ch}(x(t)) - 1 = \operatorname{ch}(\operatorname{Argsh}(t)) - 1 = \sqrt{1 + t^2} -$$

On obtient donc la courbe suivante
(attention ! comme $t \geq 0$, $x(t)$ ne parcourt que $\mathbb{R}_+$!)



C. Une seconde fonction θ

Dans cette deuxième partie, on suppose que, pour tout t dans $\mathbb{R}$, $\theta(t) = 2\operatorname{Arctan}(e^t) - \frac{\pi}{2}$.

9. Déterminer les variations de θ , sa parité ou son imparité, ses limites en $\pm\infty$ et tracer l'allure de son graphe.

Correction

La fonction θ est clairement dérivable, comme composée de fonctions dérivables et, pour tout t dans $\mathbb{R}$,

$$\theta'(t) = 2 \frac{e^t}{1 + e^{2t}} = \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} > 0,$$

donc θ est croissante. De plus, pour tout t dans $\mathbb{R}$,

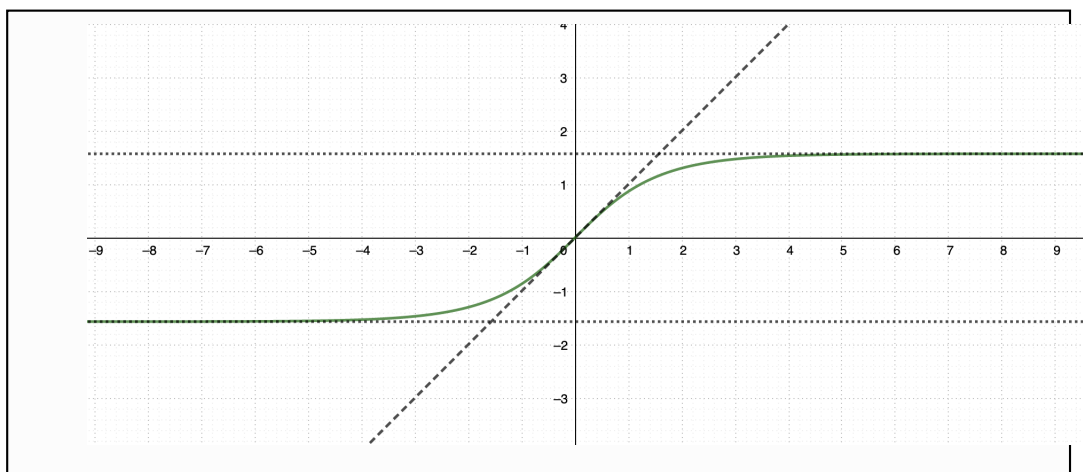
$$\theta(-t) = 2\operatorname{Arctan}(e^{-t}) - \frac{\pi}{2} = 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{e^t}\right) - \frac{\pi}{2} = 2\frac{\pi}{2} - 2\operatorname{Arctan}(e^t) - \frac{\pi}{2} = -\theta(t),$$

donc θ est impaire.

Enfin, par composition de limites,

$$\theta(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \frac{\pi}{2} \text{ et } \theta(t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} -\frac{\pi}{2}.$$

On obtient donc le graphe suivant :



10. Soit $t \in \mathbb{R}$. Vérifier que $\tan(\theta(t)) = \text{sh}(t)$, que $\sin(\theta(t)) = \text{th}(t)$ et que $\cos(\theta(t)) = \frac{1}{\text{ch}(t)}$.

Correction

Même si ce n'est pas demandé, calculons $\tan(\theta(t))$:

$$\begin{aligned} \tan(\theta(t)) &= \tan\left(2\text{Arctan}(e^t) - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{\tan(2\text{Arctan}(e^t))} \\ &= -\frac{1 - \text{Arctan}(e^t)^2}{2\text{Arctan}(e^t)} \\ &= -\frac{1 - e^{2t}}{2e^t} = \boxed{\text{sh}(t)}. \end{aligned}$$

Ensuite, comme $\theta(t) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut dire que

$$\theta(t) = \text{Arctan}(\text{sh}(t))$$

Donc

$$\sin(\theta(t)) = \sin(\text{Arctan}(\text{sh}(t))) = \frac{\text{sh}(t)}{\sqrt{1 + \text{sh}(t)^2}},$$

d'après la question 4.. Donc, comme $\text{ch}(t) = \sqrt{1 + \text{sh}(t)^2}$,

$$\sin(\theta(t)) = \frac{\text{sh}(t)}{\text{ch}(t)} = \boxed{\text{th}(t)}.$$

Enfin,

$$\cos(\theta(t)) = \frac{\sin(\theta(t))}{\tan(\theta(t))} = \frac{\text{th}(t)}{\text{sh}(t)} = \boxed{\frac{1}{\text{ch}(t)}}.$$

11. En déduire une expression de $x(t)$ et de $y(t)$ pour tout $t \geq 0$.

On remarquera que $\frac{2}{e^u + e^{-u}} = \frac{2e^u}{(e^u)^2 + 1}$.

Correction

Soit $t \geq 0$.

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \cos(\theta(u)) du = \int_0^t \frac{2}{e^u + e^{-u}} du = \int_0^t \frac{2e^u}{(e^u)^2 + 1} \\ &= [\operatorname{Arctan}(e^u)]_0^t = \boxed{\operatorname{Arctan}(e^t) - \frac{\pi}{4}}. \end{aligned}$$

De même,

$$y(t) = \int_0^t \sin(\theta(u)) du = \int_0^t \operatorname{th}(u) du = [\ln(\operatorname{ch}(u))]_0^t = \boxed{\ln(\operatorname{ch}(t))}.$$

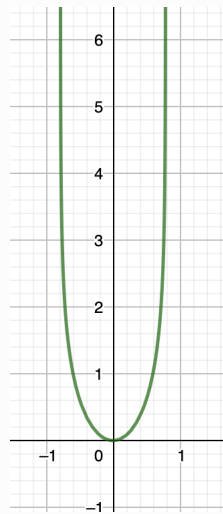
12. Exprimer, pour $t \geq 0$, $y(t)$ en fonction de $\sin(t)$ et tracer la trajectoire de la particule.

Correction

On en déduit alors que pour tout $t \geq 0$,

$$y(t) = \ln(\operatorname{ch}(t)) = -\ln(\cos(\theta(t))) = -\ln(\cos(2x(t))).$$

x varie entre $-\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$. On a donc (je ne fais pas l'étude de fonction) le graphe suivant :

**D. Une majoration générale**

Dans cette partie, on suppose que θ est de classe $\mathcal{C}^2$ (i.e. deux fois dérivable, de dérivée seconde continue) et que θ' est strictement croissante avec $\theta'(0) > 0$. On note $\lambda = \theta'(0)$ et on veut montrer que

$$\forall t > 0, \quad |z(t)| \leq \frac{2}{\lambda}.$$

On pourra utiliser le résultat suivant : si f est une fonction à valeurs complexes continue dans un segment $[a, b]$

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

13. Montrer que

$$z(t) = \int_0^t \frac{\theta''(u)}{i\theta'(u)^2} e^{i\theta(u)} du + \frac{e^{i\theta(t)}}{i\theta'(t)} - \frac{e^{i\theta(0)}}{i\theta'(0)}.$$

Correction

On sait que

$$z(t) = \int_0^t e^{i\theta(t)} dt = \int_0^t \frac{\theta'(t)e^{i\theta(t)}}{\theta'(t)} dt,$$

la dernière opération étant licite car θ' ne s'annule pas. Effectuons une intégration par parties, en posant $u(t) = \frac{1}{i}e^{i\theta(t)}$ et $v(t) = \frac{1}{\theta'(t)}$. Ainsi $u'(t) = \theta'(t)e^{i\theta(t)}$ et

$$v'(t) = -\frac{\theta''(t)}{\theta'(t)^2}. \text{ D'où}$$

$$z(t) = \left[\frac{1}{i} e^{i\theta(u)} \frac{1}{\theta'(u)} \right] + \int_0^t \frac{1}{i} e^{i\theta(u)} \frac{\theta''(u)}{\theta'(u)^2} du,$$

ce qui est exactement la formule désirée !

14. En déduire l'inégalité annoncée.

Correction

On procède par inégalités successives :

$$\begin{aligned} |z(t)| &= \left| \int_0^t \frac{\theta''(u)}{i\theta'(u)^2} e^{i\theta(u)} du + \frac{e^{i\theta(t)}}{i\theta'(t)} - \frac{e^{i\theta(0)}}{i\theta'(0)} \right| \\ &\leq \int_0^t \left| \frac{\theta''(u)}{i\theta'(u)^2} e^{i\theta(u)} \right| du + \left| \frac{e^{i\theta(t)}}{i\theta'(t)} \right| + \left| \frac{e^{i\theta(0)}}{i\theta'(0)} \right| \text{ par inégalité triangulaire} \\ &\leq \int_0^t \frac{\theta''(u)}{\theta'(u)^2} du + \frac{1}{\theta'(t)} + \frac{1}{\theta'(0)} \text{ car } \theta' \text{ et } \theta'' \text{ sont strictement positives} \\ &\leq \left[-\frac{1}{\theta'(u)} \right]_0^t + \frac{1}{\theta'(t)} + \frac{1}{\theta'(0)} \\ &\leq \frac{1}{\theta'(0)} - \frac{1}{\theta'(t)} + \frac{1}{\theta'(t)} + \frac{1}{\theta'(0)} \leq \frac{2}{\theta'(0)}, \end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu !

Problème 2. Applications de composition

Soit E un ensemble. Si $f \in E^E$, on note D_f et G_f les applications de composition à droite et à gauche par f :

$$D_f : \left\{ \begin{array}{l} E^E \rightarrow E^E \\ \varphi \mapsto \varphi \circ f \end{array} \right. \text{ et } G_f : \left\{ \begin{array}{l} E^E \rightarrow E^E \\ \varphi \mapsto f \circ \varphi \end{array} \right.$$

On fera bien attention aux objets manipulés : si f est une application de E dans E , si φ est une application de E dans E , $D_f(\varphi)$ et $G_f(\varphi)$ sont aussi des applications de E dans E . Ainsi, si $x \in E$, cela a un sens d'écrire $D_f(\varphi)(x)$: cette quantité est égale à $\varphi \circ f(x)$. En revanche, D_f et G_f sont des applications de E^E dans E^E .

Ce problème est constitué de trois parties : la dernière est largement indépendante des autres.

A. Généralités

1. Démontrer que pour toutes f et g dans E^E , $D_f(g) = G_g(f)$.

Correction

Soient f et g dans E^E . Alors $D_f(g) = g \circ f$ et $G_g(f) = g \circ f = D_f(g)$.

2. Un exemple. Dans cette question 2. et dans cette question seulement, on considère

$$f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \end{array} \right., \quad g : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \end{array} \right. \text{ et } h : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \end{array} \right.$$

Calculer $D_f(g)$, $D_g(f)$, $G_g(f)$, $G_h(f)$.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$D_f(g)(n) = g \circ f(n) = g(2n) = n,$$

donc $D_f(g) = \text{Id}_{\mathbb{N}}$. De même, $G_g(f) = D_f(g) = \text{Id}_{\mathbb{N}}$. Ensuite,

$$D_g(f)(n) = \begin{cases} f(0) = 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ f(n/2) = n & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Enfin,

$$G_h(f)(n) = h(f(n)) = \left\lfloor \frac{2n}{2} \right\rfloor = n,$$

donc $G_h(f) = \text{Id}_{\mathbb{N}}$.

3. Soient f et g dans E^E .

Démontrer les identités suivantes : $D_f \circ D_g = D_{g \circ f}$, $G_f \circ G_g = G_{f \circ g}$ et $D_f \circ G_g = G_g \circ D_f$.

Correction

Soit $\varphi \in E^E$. Alors

$$D_f \circ D_g(\varphi) = D_f(\varphi \circ g) = \varphi \circ g \circ f = D_{g \circ f}(\varphi).$$

Donc $D_f \circ D_g = D_{g \circ f}$. De même,

$$G_f \circ G_g(\varphi) = G_f(g \circ \varphi) = f \circ g \circ \varphi = G_{g \circ f}(\varphi),$$

donc $G_f \circ G_g = G_{f \circ g}$, et

$$D_f \circ G_g(\varphi) = D_f(g \circ \varphi) = g \circ \varphi \circ f = G_g(\varphi \circ f) = G_g \circ D_f(\varphi),$$

donc $D_f \circ G_g = G_g \circ D_f$.

B. Propriétés d'injectivité, de surjectivité, de bijectivité

Dans cette partie, on fixe $f \in E^E$.

B-I. Injectivité

On s'intéresse à l'injectivité de f .

4. Démontrer que f est injective si et seulement si G_f est injective.

Correction

Raisonnons par double implication.

- Supposons f injective. Démontrons que G_f est injective.
Soient φ et ψ dans E^E telles que $G_f(\varphi) = G_f(\psi)$. Alors $f \circ \varphi = f \circ \psi$.
Remarque : on ne peut pas conclure directement « par injectivité de f » : il faut revenir aux éléments !
Soit $x \in E$. Alors $f(\varphi(x)) = f(\psi(x))$ donc, par injectivité de f , $\varphi(x) = \psi(x)$.
Donc $\varphi = \psi$.
Donc G_f est injective.
- Réciproquement, supposons G_f injective. Montrons que f est injective.
Soient x et x' dans E tels que $f(x) = f(x')$.
Notons α la fonction constante égale à x et β la fonction constante égale à x' .
Alors $f \circ \alpha = f \circ \beta$, c'est-à-dire que $G_f(\alpha) = G_f(\beta)$. Par injectivité de G_f , on en déduit que $\alpha = \beta$, c'est-à-dire que $x = x'$.

5. *Un lemme de factorisation.* Démontrer que si f est injective, alors il existe φ dans E^E telle que $\varphi \circ f = \text{Id}_E$.

Il est intéressante de dessiner pour avoir une idée de la preuve ! On pourra ensuite noter $B = f(E)$, et on définir $\varphi(y)$ en disjoignant les cas, selon que $y \in B$ ou $y \notin B$.

Correction

L'idée est se dire que si $\varphi \circ f = \text{Id}_E$, alors $\varphi \sim f^{-1} \dots$ mais f^{-1} n'existe pas, sauf si on prend quelqu'un dans l'image de f !

Notons x_0 un élément quelconque de E . Définissons, pour tout y dans E ,

$$\varphi(y) = \begin{cases} \text{l'unique antécédent de } y \text{ par } f & \text{si } y \in B \\ x_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors, si $x \in E$, $\varphi(f(x)) = x$, donc $\varphi \circ f = \text{Id}_E$.

6. Démontrer que f est injective si et seulement si D_f est surjective.

Correction

Raisonnons aussi par double implication.

(a) Supposons f injective. Démontrons que D_f est surjective.

Soit $\psi \in E^E$. Par la question précédente, on dispose de φ dans E^E telle que $\varphi \circ f = \text{Id}_E$. En posant $\theta = \psi \circ \varphi$, on a $D_f(\theta) = \psi$.
D'où la surjectivité de D_f .

(b) Supposons D_f surjective. Démontrons que f est injective.

Soient x et x' dans E tels que $f(x) = f(x')$. Soit $\varphi \in E^E$ telle que $\varphi \circ f = \text{Id}_E$.
Alors $\varphi(f(x)) = \varphi(f(x'))$, donc $x = x'$.
D'où l'injectivité de f .

D'où l'équivalence et le résultat désiré !

B-II. Surjectivité

7. *Un lemme de factorisation.* Soient φ et ψ deux applications de E dans E . Démontrer l'équivalence suivante

$$\psi(E) \subset \varphi(E) \Leftrightarrow \exists \theta \in E^E, \psi = \varphi \circ \theta.$$

Correction

- Déjà, si l'on dispose de $\theta \in E^E$ telle que $\psi = \varphi \circ \theta$, on montre que $\psi(E) \subset \varphi(E)$.
Soit $y \in \psi(E)$. Alors on dispose de $x \in E$ tel que $y = \psi(x)$. Mais alors $y = \varphi \circ \theta(x)$, donc $y \in \varphi(E)$.
- Supposons désormais $\psi(E) \subset \varphi(E)$.
L'idée est définir à la main θ .
Soit $x \in E$. Alors $\psi(x) \in \varphi(E)$, donc on dispose de $y \in E$ tel que $\varphi(y) = \psi(x)$.
Posons alors $\theta(x) = y$.
On a ainsi défini, pour tout x dans E , $\theta(x)$ comme un antécédent (choisi arbitrairement) de $\psi(x)$ par φ .
On a donc, pour tout x dans E , $\varphi(\theta(x)) = \psi(x)$, par définition !

8. Démontrer que si E contient au moins deux éléments, les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est surjective
- (ii) G_f est surjective
- (iii) D_f est injective

Correction

Démontrons d'abord que (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

- Supposons f surjective, et démontrons que G_f l'est.
Soit $\psi \in E^E$. Cherchons $\varphi \in E^E$ telle que $\psi = G_f(\varphi) = f \circ \varphi$.
 Par le lemme précédent, comme f est surjective, $f(E) = E$, donc $\psi(E) \subset f(E)$.
 Ainsi, on dispose de $\varphi \in E^E$ tel que $\psi = f \circ \varphi$. Donc G_f est surjective.
- Réciproquement, supposons G_f surjective et montrons que f est surjective.
Soit $y \in E$. Prenons α la fonction constante égale à y . Par surjectivité de G_f , on dispose de $\theta \in E^E$ telle que $G_f(\theta) = \alpha$. Ainsi, pour tout x dans E , $f(\theta(x)) = \alpha(x) = y$. Donc si $x \in E$, $\theta(x)$ est un antécédent de y par f .
 Donc f est surjective !

Démontrons maintenant que (i) $\Leftrightarrow$ (iii)

- Supposons f surjective. Démontrons que D_f est injective.
Soient φ et ψ dans E^E telles que $D_f(\varphi) = D_f(\psi)$. Alors $\varphi \circ f = \psi \circ f$.
 Soit x dans E . Par surjectivité de f , on dispose de $w \in E$ tel que $x = f(w)$.
 Ainsi,

$$\varphi(x) = \varphi(f(w)) = \psi(f(w)) = \psi(x),$$
 donc $\varphi = \psi$.
- Réciproquement, supposons D_f injective et démontrons que f est surjective.
 Soit $y \in E$. Si y n'est pas atteint par f , alors pour tout x dans E , $f(x) \neq y$. Soit z dans E différent de y (**rq : c'est là qu'on a besoin que E possède au moins 2 éléments**). Posons $\varphi = \text{Id}_E$ et

$$\psi : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \neq y \\ z & \text{si } x = y \end{cases}$$

Alors $\varphi \neq \psi$, mais $\varphi \circ f = \psi \circ f$ (car y n'est pas atteint par f !), donc D_f n'est pas injective !

B-III. Bijectivité

On note S_E l'ensemble des bijections de E dans E .

On a donc montré que, pour $f \in E^E$, f était bijective si et seulement si D_f et G_f l'étaient. Dans le cas où $f \in S_E$, on définit l'application de conjugaison par f :

$$C_f : \begin{cases} E^E \rightarrow E^E \\ \varphi \mapsto f \circ \varphi \circ f^{-1} \end{cases}$$

9. Démontrer que, si f est une application bijective de E dans E , C_f est bijective et donner sa bijection réciproque.

Correction

f est bijective, et on remarque que, pour $\varphi \in E^E$,

$$C_{f^{-1}} \circ C_f(\varphi) = C_{f^{-1}}(f \circ \varphi \circ f^{-1}) = f^{-1} \circ f \circ \varphi \circ f^{-1} \circ f = \varphi,$$

donc $C_{f^{-1}} \circ C_f(\varphi) = \text{Id}_{E^E}$. De même, $C_{f^{-1}} \circ C_f(\varphi) = \text{Id}_{E^E}$, donc C_f est bijective, de bijection réciproque $C_{f^{-1}}$.

10. On considère $\sim$ définie sur E^E par : $\forall(\varphi, \psi) \in (E^E)^2$, $\varphi \sim \psi \Leftrightarrow \exists g \in S_E$, $\psi = C_g(\varphi)$. Démontrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

Correction

On vérifie la réflexivité, la symétrie et la transitivité de cette relation.

- réflexivité. Soit $\varphi \in E^E$. Alors $\varphi = \text{Id}_E \circ \varphi \circ \text{Id}_E^{-1}$, donc $\varphi \sim \varphi$.
- symétrie. Soient φ et ψ dans E^E telles que $\varphi \sim \psi$. Alors on dispose de g bijective telle que $\psi = g \circ \varphi \circ g^{-1}$. Alors $\varphi = g^{-1} \circ \psi \circ g = C_{g^{-1}}(\psi)$, donc $\psi \sim \varphi$.
- transitivité. Soient φ , ψ et θ dans E^E telles que $\varphi \sim \psi$ et $\psi \sim \theta$. Alors on dispose de f et g bijectives telles que $\psi = f \circ \varphi \circ f^{-1}$ et $\theta = g \circ \psi \circ g^{-1}$. Ainsi,

$$\theta = (g \circ f) \circ \varphi \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = (g \circ f) \circ \varphi \circ (g \circ f)^{-1} = C_{g \circ f}(\varphi),$$

donc $\varphi \sim \theta$,

d'où la transitivité, donc $\sim$ est bien une relation d'équivalence !

11. Quelle est la classe d'équivalence de Id_E pour cette relation ?

Correction

Soit φ dans la classe d'équivalence de Id_E . Alors on dispose de f bijective telle que $\varphi = f \circ \text{Id}_E \circ f^{-1}$, donc $\varphi = \text{Id}_E$.

Réciproquement, un élément est toujours dans sa classe d'équivalence, donc la classe d'équivalence de Id_E est $\{\text{Id}_E\}$.

C. Exemples dans $\mathbb{R}$

Dans toute la fin du problème, on prend $E = \mathbb{R}$. On considère les fonctions suivantes :

$$\sigma : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -x \end{cases} \quad \text{et, pour } a \in \mathbb{R}, \tau_a : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x + a \end{cases}.$$

Si Ψ est une application de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on note $\text{Fix}(\Psi) = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \Psi(f) = f\}$, l'ensemble des points fixes de Ψ .

12. Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $a > 0$. Illustrer, sur un dessin, la manière d'obtenir les courbes de $D_\sigma(f)$, $G_\sigma(f)$, $D_{\tau_a}(f)$ et $G_{\tau_a}(f)$ à l'aide de la courbe de f .

Correction

- Déjà, $D_\sigma(f) : x \mapsto f(-x)$, donc le graphe de $D_\sigma(f)$ est le symétrique du graphe de f par rapport à l'axe des ordonnées.

- Ensuite, $G_\sigma(f) : x \mapsto -f(x)$, donc le graphe de $G_\sigma(f)$ est le symétrique du graphe de f par rapport à l'axe des abscisses.
- Puis $D_{\tau_a}(f) : x \mapsto f(x+a)$ donc le graphe de $D_{\tau_a}(f)$ est le translaté du graphe de f par la translation de vecteur $\begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Enfin, $G_{\tau_a}(f) : x \mapsto f(x) + a$ donc le graphe de $G_{\tau_a}(f)$ est le translaté du graphe de f par la translation de vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$.

13. Déterminer $\text{Fix}(D_\sigma)$, $\text{Fix}(G_\sigma)$, $\text{Fix}(D_\sigma \circ G_\sigma)$, $\text{Fix}(D_{\tau_a})$ (où $a > 0$).

Correction

C'est juste de la manipulation de vocabulaire. Soit $f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$. Alors

- $f \in \text{Fix}(D_\sigma)$ si, et seulement si pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$, i.e. si et seulement si f est paire. $\text{Fix}(D_\sigma)$ est l'ensemble des fonctions paires.
- $f \in \text{Fix}(G_\sigma)$ si, et seulement si pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) = -f(x)$, i.e. si et seulement si f est nulle. $\text{Fix}(G_\sigma)$ est le singleton constitué de la fonction nulle.
- $f \in \text{Fix}(D_\sigma \circ G_\sigma)$ si, et seulement si pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) = -f(-x)$, i.e. si et seulement si f est impaire. $\text{Fix}(D_\sigma \circ G_\sigma)$ est l'ensemble des fonctions impaires.
- $f \in \text{Fix}(D_{\tau_a})$ si, et seulement si pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) = f(x+a)$, i.e. si et seulement si f est a -périodique. $\text{Fix}(D_{\tau_a})$ est l'ensemble des fonctions a -périodiques.

On cherche enfin dans cette partie à déterminer

$$A = \text{Fix}(D_{\sin}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

où $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $f \in A$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On pose, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_0 = x$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

14. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $f(u_n) = f(x)$.

Correction

On raisonne par récurrence, en notant, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n : f(u_n) = f(x)$.

L'initialisation est évidente, $u_0 = x$ donc $f(u_0) = f(x)$.

Ensuite, pour l'hérédité, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$. Alors

$$f(u_{n+1}) = f(\sin(u_n)) = D_{\sin}(f)(u_n) = f(u_n) = f(x),$$

par hypothèse de récurrence.

D'où l'hérédité et le résultat.

15. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, puis qu'elle converge vers 0.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$u_{n+1} = \sin(u_n) \leq u_n,$$

donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît. Par récurrence immédiate, comme $u_1 \in [0, 1]$, on montre que $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 2$, $u_n \geq 0$. Décroissante et minorée, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ , qui vérifie $\ell = \sin(\ell)$ (car, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$). Or, pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, $\sin(x) \leq x$ avec égalité si et seulement si $x = 0$.
Donc $\ell = 0$, donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

16. Que peut-on en déduire sur f ?

Correction

Comme f est continue, $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0)$, donc $f(x) = f(0)$. Ainsi, f est constante sur $\mathbb{R}_+$.

Mais, en faisant le même raisonnement que précédemment en prenant $u_0 < 0$, on obtiendrait le même résultat.

Finalement, f est constante.

L'ensemble A est l'ensemble constitué des fonctions constantes.