

TD 7

Nombres réels et suites

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. *Moyenne de Cesàro, exercice ultra-classique.* ●●○

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier n par $S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$.

1. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, avec $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ell$. On commencera par $\ell = 0$.
2. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.
3. Les réciproques des deux énoncés précédents sont-elles vraies ?

Exercice 2. *Moyenne arithmético-géométrique.* ●●○ Soient a et b deux réels strictement positifs. On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = a, v_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}. \end{cases}$$

Démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers la même limite.

Exercice 3. *Vers le critère de d'Alembert.* Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, avec ℓ un réel.

1. Montrer que si $\ell < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
2. Montrer que si $\ell > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
3. Que peut-on dire si $\ell = 1$?

Exercice 4. ●●○ Soit (u_n) une suite réelle.

1. On suppose (u_{2n}) , (u_{2n+1}) convergentes de même limite. Montrer que (u_n) converge.
2. On suppose (u_n) croissante et (u_{2n}) convergente. Montrer que (u_n) converge.
3. On suppose (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergentes. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 5. ●●○ On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.
2. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. En déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 6. ●○○ Soit (u_n) une suite décroissante de réels telle que $u_n + u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ainsi qu'un équivalent en $+\infty$.

Exercice 7. ●●○ Déterminer, à l'aide des relations de domination, de négligeabilité, et d'équivalence, les limites des suites suivantes

1. $\frac{\sin \frac{1}{n}}{\tan \frac{1}{2n}}$

3. $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

5. $\frac{1 - e^{\frac{3}{n}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1}$

2. $\frac{n^4 - 2n^{5/2} + n\sqrt{n} - \ln(n)}{n + 3n^2 \sin \frac{1}{\sqrt{n}} - n \ln(n)}$

4. $(1 + nx)^{\frac{1}{n}}$

6. $\frac{n^3 \sin \frac{3}{1+n}}{\operatorname{Arctan} \frac{1}{8n^2} e^{\sqrt{n}}}$

2 Exercices à travailler en TD

Plan de travail, par méthodes et techniques à connaître

- déterminer des limites : exercices 11, 13, 14, 15, 16.
- manipuler des parties entières : exercices 18, 19.
- manipuler des suites extraites : exercice 20.
- manipuler des ε (pour revenir à la définition de la convergence par exemple) : exercices corrigés en classe 3 et 1, exercices 19, 8.
- étudier des suites récurrentes : exercices faits en classe 2 et 5, exercices ??, 25, 26, 27.

2.1 Epsiloneries

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant

$$\forall (k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{k} + \frac{k}{n}.$$

Démontrer que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Exercice 9. Vers le critère de Cauchy pour les séries.. ●●○ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^{\frac{1}{n}} = \ell$, avec ℓ un réel.

- Montrer que si $\ell < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- Montrer que si $\ell > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- Que peut-on dire si $\ell = 1$?

Exercice 10. Une propriété de limite monotone. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N} : [p \geq n \text{ et } (\forall q \in \mathbb{N}, q \geq p \Rightarrow u_q \geq u_n)]$$

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle monotone ?
- Montrer en revanche que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une propriété « de limite monotone » : si elle est majorée elle converge, et si elle n'est pas majorée, elle tend vers $+\infty$.

2.2 Théorèmes généraux sur les suites et les limites

Exercice 11. ●○○ Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1, 0 \leq v_n \leq 1 \text{ et } u_n v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

Que dire de ces suites ?

Exercice 12. ●●○ Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, (u_n) et (v_n) deux suites telles que

$$\begin{cases} n \in \mathbb{N}, u_n \leq a \text{ et } v_n \leq b \\ u_n + v_n \rightarrow a + b \end{cases}$$

Montrer que $u_n \rightarrow a$ et $v_n \rightarrow b$.

Exercice 13. ●○○

1. Démontrer que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.

2. Déterminer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Exercice 14. ●○○ / ●●○ Déterminer les limites en $+\infty$ des suites de terme général

1. $\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}$

2. $\sqrt[n]{n^2}$

3. $\sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2}$

4. $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

5. $\frac{\sin(2n)}{\text{th}(3n)}$

6. $\frac{n^n}{n!}$

7. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2}$

8. $\sum_{k=1}^n \frac{\lfloor kx \rfloor}{n^2}$

Exercice 15. *Problème d'inversion des limites.* ●●○

Comparer

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Exercice 16. *Sur l'indétermination 1^∞ .* ●●○

Soit ℓ un élément de $\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Déterminer deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$, et $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^{v_n} = \ell$.

Exercice 17. ●●○ On va démontrer que la suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite. On suppose que c'est le cas et qu'elle en possède une.

1. Démontrer que cette limite est finie. On l'appelle ℓ .
2. Démontrer que la suite $(\cos(n+1))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ , puis que $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
3. Aboutir à une contradiction en échangeant les rôles de sin et de cos.

Exercice 18. ●●○ Soient a, b, c trois réels tels que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\lfloor an \rfloor + \lfloor bn \rfloor = \lfloor cn \rfloor.$$

Démontrer que $a + b = c$.

Exercice 19. ●●○ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels convergeant vers une limite ℓ réelle. A-t-on

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lfloor u_n \rfloor = \lfloor \ell \rfloor ?$$

2.3 Du côté des sous-suites

Exercice 20. ●●○ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée. Montrer qu'elle admet une suite extraite qui diverge vers $+\infty$.

2. On suppose que $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une sous-suite bornée.

Exercice 21. ●●○ Soient $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\frac{p_n}{q_n}$ converge vers un irrationnel x .

Démontrer que $q_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et que $|p_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

On pourra procéder par l'absurde et par extractions de suites.

Exercice 22. *Approximation diophantienne.* ●●○ Si y est un réel, on appelle partie fractionnaire de y la quantité, notée $\{y\}$ et définie par $\{y\} = y - \lfloor y \rfloor$. Soit x un réel.

1. Démontrer que : $\forall N \in \mathbb{N}, \exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, 1 \leq q \leq N, \left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{qN}$.

On appliquera le principe des tiroirs à $0, \{x\}, \{2x\}, \dots, \{Nx\}$.

2. En déduire qu'il existe une infinité de couples (p, q) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$.

2.4 Caractérisations séquentielles

Exercice 23. ●●○ Soit A la partie de $\mathbb{R}$ suivante :

$$A = \left\{ \frac{nm}{n^2 + m^2 + 1}, (n, m) \in \mathbb{N}^2 \right\}.$$

1. Montrer que A possède une borne supérieure.
2. Déterminer la borne supérieure de A .
3. Montrer que A n'a pas de plus grand élément.

Exercice 24. ●○○ Montrer que l'ensemble

$$\left\{ \frac{n}{2^m}, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \right\}$$

est dense dans $\mathbb{R}$.

2.5 Suites récurrentes

Exercice 25. ●●○ On considère la suite définie par $u_0 > 3$, et $u_{n+1} = \frac{4u_n - 9}{u_n - 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Tracer le graphe de $x \mapsto \frac{4x - 9}{x - 2}$, préciser les points d'intersection avec la droite $y = x$.
2. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et les valeurs éventuelles de sa limite.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.
4. Étudier la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 26. ●●○ Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles, telles que $u_0 < v_0$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite à préciser.

Exercice 27. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 > 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

1. Montrer que (u_n) est croissante.
2. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
3. On pose, pour tout n entier, $v_n = e^{u_n}$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_{n+1} - v_n) = 1$.
4. En utilisant le théorème de Cesàro, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\ln(n)}$.

2.6 Un peu d'analyse asymptotique

Exercice 28. ●○○ Classer les suites suivantes par ordre de négligeabilité.

$$a_n = n^3, \quad b_n = 4n - n^3, \quad c_n = ne^{3n}, \quad d_n = \sin \frac{1}{n}, \quad f_n = ne^n, \quad g_n = n^3 \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad h_n = \frac{n^4 - n^2}{\sqrt{n} + \ln(n)}.$$

Exercice 29. ●●○ Déterminer, à l'aide des relations de domination, de négligeabilité, et d'équivalence, les limites des suites suivantes

1. $n(\sqrt[3]{n+\pi} - \sqrt[3]{n})$

2. $\frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(3n)}{\sin \frac{1}{n}}$

3. $\frac{\sqrt{1 + \sin \frac{1}{n}} - 1}{e^{1+\frac{1}{n}} - e}$

4. $\sin \left(\tan \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \times (1 + 3\sqrt{n})^2$

5. $\frac{n^n}{(n+1)^n}$

6. $\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$

Exercice 30. Une suite définie implicitement. ●●●

- Montrer que sur chacun des intervalles $\left] -\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi \right[$, $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan(x) = x$ admet une unique solution x_n .
- Donner un équivalent simple de x_n .
- On pose $y_n = \frac{\pi}{2} + n\pi - x_n$.
 - Déterminer une équation vérifiée par y_n .
 - En déduire que $y_n \xrightarrow{+\infty} 0$.
 - Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Indications

- Ce n'est pas si évident de faire un théorème d'encadrement, voilà pourquoi j'ai mis cet exercice dans les « epsiloneries » : prendre un ε , choisir correctement k puis n , ou bien k . À vous de voir !
- Calquer l'exercice fait en cours sur la règle de D'Alembert. Utiliser des ε et comparer à des suites géométriques.
- Non, considérer $n + 2(-1)^n$.
 - Reprendre la démonstration du théorème de la limite monotone en considérant l'ensemble des termes de la suite.
 - De même !
- Tenter d'encadrer $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Repasser très précisément aux ε , et utiliser notamment le fait que $b - v_n \geq 0$ pour tout n .
- Penser à une étude de fonctions pour la première question, à un télescope pour la seconde.
- Penser : aux « quantités conjuguées »] pour les racines, aux formes exponentielles, et aux encadrements pour les sommes. Les (iv), (v), (vii) sont à faire à la fin, beaucoup plus difficiles !
- Déclarez bien vos variables.
- Penser aux exemples vus en cours avec l'exponentielle.
- La suite est bornée...

- (b) Utiliser une formule de trigonométrie pour $\cos(a + b)$.
- (c) Utiliser une formule de trigonométrie pour $\sin(a + b)$, et penser que $\cos^2 + \sin^2 = 1$.
- ?? Penser à faire des encadrements : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ **et** $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$. Penser que pour n dans $\mathbb{N}$, $\lfloor n \rfloor = n$. Penser enfin que $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante.
- 18 Effectuer encore des encadrements.
- 19 Distinguer les cas $\ell \in \mathbb{Z}$ et $\ell \notin \mathbb{Z}$. Penser que si $\ell \notin \mathbb{Z}$, $\exists \varepsilon > 0$, $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ ne contient aucun entier (le justifier).
- 20 Nier proprement les énoncés et construire des suites extraites comme en cours, par récurrence.
- 21 Faire de l'absurde... en supposant que $q_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.
- montrer qu'il existe une sous-suite de (q_n) bornée.
 - montrer qu'il existe une sous-suite de (q_n) convergente.
 - montrer qu'il existe une sous-suite de (q_n) constante.
- ?? Toujours commencer par calculer les premiers termes, sauf si vous reconnaissez des suites vues en cours (arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2, etc.)
- 25 La bonne définition se montre par récurrence. Pour les limites, utiliser les règles sur la convergence.
- 26 Essayer d'étudier $u_n + v_n$ et $u_n - v_n$ et déterminer la limite de chacune de ces suites.
- 27 Utiliser le théorème de la limite monotone pour la 2. Pour la 3, factoriser par e^{u_n} et utiliser des taux de variation pour reconnaître une dérivée.
- 28 C'est du cours (croissances comparées). Penser à faire un équivalent avant de comparer !
- 30 (a) Utiliser le théorème de la bijection
- (b) Utiliser le théorème d'encadrement pour les équivalents.
- (c) Penser aux formules liant $\tan(x)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.