

DM 06

à rendre le lundi 17 novembre

Plan d'étude. En début de DM, merci de préciser la formule que vous avez choisie.

- Formule « bases ».** Faire le Problème 1, questions 1-7. Remarquer que les questions 1,2,3 seront faites en classe mercredi ! (2h)
- Formule « intermédiaire »** Faire le Problème 1 en entier. (3h)
- Formule « complète »** Problème 1 + exercices d'initiative. (3h+temps libre)

Problème 1. Autour de la convergence au sens de Cesàro

Dans tout l'énoncé, $(u_n)_{n \geq 1}$ désigne une suite réelle, et $(v_n)_{n \geq 1}$ désigne la suite définie par, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$. On dit que $(u_n)_{n \geq 1}$ **converge au sens de Cesàro** si $(v_n)_{n \geq 1}$ converge.

Dans tout le problème, si besoin est, on pourra utiliser sans justification que si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, alors $u_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

A. De la convergence à la convergence au sens de Cesàro

A-I. La convergence implique la convergence au sens de Cesàro

- Dans cette question, **on suppose que** $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

(a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq n_0$,

$$\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k \right) - \frac{\varepsilon}{2} \leq v_n \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k \right) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

(b) En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0.

- Démontrer que lorsque la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers un réel ℓ quelconque, alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ .

A-II. Application à l'étude d'une suite récurrente

On considère la suite définie par

$$x_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, x_{n+1} = \frac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n}.$$

- Montrer que pour tout $n \geq 2$, $0 < x_n < 1$.
- Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
- La suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

Notons $a_1 = \frac{1}{x_1}$ et, pour tout $n \geq 2$, $a_n = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}}$. On note, pour tout $n \geq 1$, $b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$.

- Montrer que $(a_n)_{n \geq 1}$ converge vers 1.
- En utilisant la suite $(b_n)_{n \geq 1}$ et la convergence au sens de Cesàro, démontrer que

$$nx_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

A-III. Différence des termes consécutifs

Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle quelconque.

8. On suppose que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ converge. Montrer que la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n \geq 1}$ converge.
9. On suppose que la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n \geq 1}$ converge vers un nombre réel ℓ .
 - (a) Montrer que la suite $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n \geq 1}$ converge et préciser sa limite. *On pourra s'inspirer des méthodes des questions 6. et 7..*
 - (b) Étudier la convergence ou la divergence de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ dans le cas où $\ell \neq 0$.
 - (c) Dans le cas où $\ell = 0$, la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est-elle nécessairement convergente ?

B. De la convergence au sens de Cesàro à la convergence

B-I. La réciproque du A-I. est fausse

Dans les deux questions suivantes, on pose, pour tout $n \geq 1$, $u_n = (-1)^n$ et $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$.

10. Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n \geq 1}$.
11. Démontrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ n'a pas de limite et conclure quant à la validité de la réciproque de la proposition établie en A-I.

B-II. Une réciproque possible de la propriété A-I.

Dans cette question, on suppose que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ converge.

12. Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} \leq 2v_{2n} - v_n$.
13. Établir la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ et préciser sa limite.
14. Énoncer la propriété ainsi démontrée sous la forme d'une condition nécessaire et suffisante.

Exercice 1. Donner un sens à l'égalité suivante et la démontrer :

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}.$$