N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

DM 07
à rendre le lundi 24 novembre

Plan d'étude. En début de DM, merci de préciser la formule que vous avez choisie.

1. **Formule « bases ».** Faire l'exercice d'arithmétique et le problème 1, questions 1 à 6 (2h).
2. **Formule « intermédiaire »** Faire l'exercice d'arithmétique et le problème 1, questions 1 à 10 (3h).
3. **Formule « complète »** Tout faire (4h).

Exercice 1. *Deux questions d'arithmétique*.

1. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, 6 divise $5n^3 + n$.
2. Démontrer que $\sqrt[3]{5}$ est irrationnel.

Problème 1. Autour des contractions

Le but de ce problème est d'étudier quelques exemples de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Soit $k \in]0, 1[$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f est k-contractante, ou que c'est une k-contraction si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

Si $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, on dit que g est une k-contraction si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2,\ |g(x) - g(y)| \leqslant k|x - y|.$$

A. Premiers résultats

Soit f une k-contraction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifie $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{C}$, alors $f(a_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$.
2. Démontrer que f a au plus un point fixe.
3. On suppose dans cette question que f admet un point fixe ℓ. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant k^n|u_0 - \ell|$. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

B. Le théorème du point fixe de Banach-Picard

Le but de cette section est de démontrer le joli résultat suivant :

Proposition 1

Soit $k \in]0, 1[$, soit f une k-contraction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Alors f admet un unique point fixe.

Pour démontrer ce résultat, on prend f une contraction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, puis on définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{C}$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n|u_1 - u_0|$. En déduire, à l'aide d'un télescopage, que pour tout $m \leqslant n$ dans $\mathbb{N}$,

$$|u_n - u_m| \leqslant k^m \frac{1 - k^{n-m}}{1 - k}|u_1 - u_0|,$$

puis que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

5. Conclure qu'il existe une extraction φ et un complexe ℓ tels que $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

6. Démontrer que $|u_{\varphi(n)} - u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

7. Démontrer enfin que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, puis que f admet un point fixe. *On pourra remarquer que* $u_n - \ell = u_n - u_{\varphi(n)} + u_{\varphi(n)} - \ell$.

C. Le cas des semi-contractions

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

Proposition 2

Soit f une semi-contraction, i.e. une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|.$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

8. Trouver trois exemples très simples (affines) de fonctions f tels que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge/tende vers $+\infty$/n'ait pas de limite. Ceci permet de comprendre pourquoi on s'intéresse à la limite de $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et pas à celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

C-I. Le lemme de Fekete

Il s'agit ici d'établir un lemme préliminaire. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs qui est sous-additive, c'est-à-dire que

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2,\ a_{m+n} \leqslant a_m + a_n.$$

Notre but est de démontrer que $\dfrac{a_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \inf(A)$, où $A = \left\{\dfrac{a_n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

9. Soit $(n, N) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soient q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de n par N. Démontrer que

$$\frac{a_n}{n} \leqslant \frac{a_N}{N} + \frac{M_N}{n},$$

où $M_N = \max\{a_0, a_1, \dots, a_{N-1}\}$.

10. Démontrer alors que $\dfrac{a_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \inf(A)$. (en justifiant que $\inf(A)$ existe bien)
On aura intérêt à utiliser les ε, et notamment une bonne caractérisation de la borne inférieure.

C-II. Deux autres résultats préliminaires

11. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite tendant vers $+\infty$. Démontrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant N$ tel que

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ v_n \geqslant v_k.$$

12. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite sous-additive, telle que $\dfrac{a_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A > 0$. Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout N dans $\mathbb{N}$, il existe $n \geqslant N$ tel que

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ a_n \geqslant a_{n-k} + (A - \varepsilon)k.$$

On pourra commencer en déterminant la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $a_n - n(A - \varepsilon)$.

C-III. Démonstration de la proposition

On note, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $d_n = |u_n - u_0| = |u_n|$ (on rappelle que l'on a supposé $u_0 = 0$).

13. Démontrer que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite sous-additive, puis que $\left(\dfrac{d_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note A sa limite.

14. Justifier que si $A = 0$, la proposition est démontrée.

On suppose désormais que $A > 0$.

15. Démontrer, en utilisant la question 12., qu'il existe une suite $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 et une suite d'entiers $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$, tendant vers $+\infty$, telles que pour tout i,

$$\forall \ell \leqslant n_i,\ d_{n_i} \geqslant d_{n_i-\ell} + (A - \varepsilon_i)\ell,$$

et telle que la suite $(u_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ soit de signe constant.

Supposons que pour tout i dans $\mathbb{N}$, $u_{n_i} > 0$. On va démontrer, à l'aide de cette suite, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant.

16. Soit $i \in \mathbb{N}$. Démontrer que, pour tout $\ell \leqslant n_i$,

$$-u_\ell \leqslant |u_\ell - u_{n_i}| - |u_{n_i}| \leqslant d_{n_i-\ell} - d_{n_i} \leqslant -(A - \varepsilon_i)\,\ell.$$

17. Conclure alors que $u_\ell \geqslant 0$ pour tout ℓ puis que $\dfrac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$. Comment adapter le cas où $(u_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ est toujours strictement négative ?