# TD 7
# Nombres réels et suites

## 1 Exercices corrigés en classe

**Exercice 1.** *Moyenne de Cesàro, exercice ultra-classique.* ●●○
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier $n$ par $S_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, avec $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ell$. On commencera par $\ell = 0$.
2. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.
3. Les réciproques des deux énoncés précédents sont-elles vraies ?

**Correction**

Exercice corrigé en cours : me demander si besoin d'éclaircissements.

**Exercice 2.** *Moyenne arithmético-géométrique.* ●◐○ Soient $a$ et $b$ deux réels strictement positifs. On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = a,\ v_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n},\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}. \end{cases}$$

Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers la même limite.

**Exercice 3.** *Vers le critère de d'Alembert.* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, avec $\ell$ un réel.

1. Montrer que si $\ell < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

**Correction**

On sait que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell < 1$. Soit $a$ tel que $\ell < a < 1$ ($a = \dfrac{1+\ell}{2}$ par exemple). Alors on dispose d'un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} < a.$$

Alors on montre par une récurrence immédiate que

$$\forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant a^{n-N} u_N.$$

Or, $a^{n-N} u_N \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $0 < a < 1$, donc, comme $u_n > 0$, on en déduit par théorème d'encadrement que $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. Montrer que si $\ell > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

**Correction**

En posant encore $a = \dfrac{\ell+1}{2}$, on a cette fois-ci $\ell > a > 1$, et on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant a,$$

donc

$$\forall n \geqslant \mathbb{N},\ u_n \geqslant a^{n-N} u_N.$$

Comme $a > 1$ et $u_N > 0$, $a^{n-N} u_N \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

**3.** Que peut-on dire si $\ell = 1$ ?

**Correction**

Si $\ell = 1$ on ne peut rien dire : prendre $u_n = n$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$.

**Exercice 4.** ●●◐ Soit $(u_n)$ une suite réelle.

**1.** On suppose $(u_{2n})$, $(u_{2n+1})$ convergentes de même limite. Montrer que $(u_n)$ converge.

**Correction**

C'est du cours !

**2.** On suppose $(u_n)$ croissante et $(u_{2n})$ convergente. Montrer que $(u_n)$ converge.

**Correction**

Montrons que $(u_n)$ est majorée. $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, donc bornée, donc majorée par $M \in \mathbb{R}$. Soit alors $n \in \mathbb{N}$ : si $n$ est pair, $u_n \leqslant M$ ; si $n$ est impair, $n+1$ est pair donc $u_{n+1} \leqslant M$, donc, par croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_n \leqslant M$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, donc convergente car croissante.

**3.** On suppose $(u_{2n})$, $(u_{2n+1})$ et $(u_{3n})$ sont convergentes. Montrer que $(u_n)$ converge.

**Correction**

Posons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}$, $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$, $\ell'' = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{3n}$. La suite $(u_{6n})$ est extraite de $(u_{2n})$ donc converge vers $\ell$ ; mais elle est aussi extraite de $(u_{3n})$ donc converge vers $\ell''$. Donc $\ell = \ell''$. De même, la suite $(u_{3(2n+1)}$ est à la fois extraite de $(u_{2n+1})$ et $(u_{3n})$ donc $\ell' = \ell''$. Donc $\ell = \ell'$. Donc $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ convergent vers la même limite. Donc $(u_n)$ converge.

**Exercice 5.** ●●○ On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**1.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.

**Correction**

On procède par récurrence : pour l'initialisation, $u_0 = 3 > 2$ et ensuite, si $u_n > 2$, on calcule

$$u_{n+1} - 2 = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} - 2 = \frac{4u_n - 2 - 2u_n - 2}{u_n + 1} = \frac{2(u_n - 2)}{u_n + 1} > 0,$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

par HR. D'où l'hérédité et le résultat.

**2.** Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Correction**

Soit $n$ dans $\mathbb{N}$. Alors

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} - u_n = \frac{4u_n - 2 - u_n^2 - u_2}{u_n + 1} = \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{u_n + 1} = -\frac{(u_n - 2)(u_n - 1)}{u_n + 1} < 0,$$

car $u_n > 2$. Donc $(u_n)$ est décroissante.

**3.** En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Correction**

Décroissante et minorée, la suite converge. SOit $\ell$ sa limite. Alors comme $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}$, $\ell = \dfrac{4\ell - 2}{\ell + 1}$ (car $(u_{n+1})$ est extraite de $(u_n)$), donc $\ell^2 + \ell = 4\ell - 2$. Donc $\ell = 1$ ou $\ell = 2$ (on résout l'équation). Or, pour tout $n$, $u_n > 2$ donc, en passant à la limite, $\ell \geqslant 2$ donc $\ell = 2$.

**Exercice 6.** ●○○ Soit $(u_n)$ une suite décroissante de réels telle que $u_n + u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ainsi qu'un équivalent en $+\infty$.

**Correction**

**ATTENTION !** On ne sait pas que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ! Donc on ne peut pas dire que $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell$ donc que $\ell = 0$... En revanche, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$, donc

$$u_n + u_{n+1} \leqslant 2u_n \leqslant u_{n-1} + u_n,$$

Or, $u_n + u_{n+1} \sim \dfrac{1}{n}$ et $u_{n-1} + u_n \sim \dfrac{1}{n-1} \sim \dfrac{1}{n}$. Donc, par encadrement, $2u_n \sim \dfrac{1}{n}$ donc $u_n \sim \dfrac{1}{2n}$.

**Exercice 7.** ●●○ Déterminer, à l'aide des relations de domination, de négligeabilité, et d'équivalence, les limites des suites suivantes

1. $\dfrac{\sin \frac{1}{n}}{\tan \frac{1}{2n}}$
2. $\dfrac{n^4 - 2n^{5/2} + n\sqrt{n} - \ln(n)}{n + 3n^2 \sin \frac{1}{\sqrt{n}} - n\ln(n)}$
3. $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$
4. $(1 + nx)^{\frac{1}{n}}$
5. $\dfrac{1 - e^{\frac{3}{n}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1}$
6. $\dfrac{n^3 \sin \frac{3}{1+n}}{\operatorname{Arctan} \frac{1}{8n^2} e^{\sqrt{n}}}$

# 2 Exercices à travailler en TD

**Plan de travail, par méthodes et techniques à connaître**

- déterminer des limites : exercices 11, 13, 14, 15, 16.
- manipuler des parties entières : exercices 18, 19.
- manipuler des suites extraites : exercice 20.
- manipuler des $\varepsilon$ (pour revenir à la définition de la convergence par exemple) : exercices corrigés en classe 3 et 1, exercices 19, 8.
- étudier des suites récurrentes : exercices faits en classe 2 et 5, exercices **??**, 25, 26, 27.

## 2.1 Epsiloneries

**Exercice 8.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant

$$\forall (k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{k} + \frac{k}{n}.$$

Démontrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

**Exercice 9.** *Vers le critère de Cauchy pour les séries..* ●●○ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = \ell$, avec $\ell$ un réel.

1. Montrer que si $\ell < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

**Correction**

On raisonne de même : si $a = \dfrac{\ell+1}{2}$, on dispose d'un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N,\ \sqrt[n]{u_n} < a,$$

donc

$$\forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant a^n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et on conclut par théorème d'encadrement.

2. Montrer que si $\ell > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

**Correction**

De même si $\ell > 1$.

3. Que peut-on dire si $\ell = 1$ ?

**Correction**

Enfin, si l'on prend $u_n = e^{\sqrt{n}}$ et $v_n = e^{-\sqrt{n}}$, $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $v_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors que $\sqrt[n]{u_n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\sqrt[n]{v_n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1$.

**Exercice 10.** *Une propriété de limite monotone*. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N} : [p \geqslant n \text{ et } (\forall q \in \mathbb{N}, q \geqslant p \Rightarrow u_q \geqslant u_n)]$$

**1.** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ?

**Correction**

NON ! Si on prend $u_n = n + (-1)^n$ : alors $u_{n+1} - u_n = n + 1 + (-1)^{n+1} - n - (-1)^n = 1 + 2.(-1)^{n+1}$, qui change de signe en fonction de la parité de $n$. Donc la suite n'est pas croissante.
**soit** $n \in \mathbb{N}$. **Posons** $p = n + 2$. Soit $q \geqslant p$. Alors

$$u_q - u_n = (q - n) + (-1)^q - (-1)^n.$$

Or, $q - n \geqslant 2$ donc $q - n + (-1)^q - (-1)^n \geqslant 0$. Donc la suite vérifie la propriété.

**2.** Montrer en revanche que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une propriété « de limite monotone » : si elle est majorée elle converge, et si elle n'est pas majorée, elle tend vers $+\infty$.

**Correction**

On considère $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.
. Si $A$ est majorée, soit $\ell$ sa borne supérieure. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, on dispose de $n \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell$. Par la proposition satisfaite par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geqslant n$ et $\forall q \in \mathbb{N},\ q \geqslant N \Rightarrow u_q \geqslant u_N$.
Soit $q \geqslant N$. Alors $\ell - \varepsilon \leqslant u_N \leqslant u_q \leqslant \ell$. Ceci assure la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
. Sinon, soit $M \in \mathbb{N}$. On dispose donc de $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant M$. Par la proposition satisfaite par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geqslant n$ et $\forall q \in \mathbb{N},\ q \geqslant N \Rightarrow u_q \geqslant u_N$.
Soit $q \geqslant N$. Alors $u_q \geqslant u_N \geqslant M$. Ceci assure la divergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $+\infty$.

## 2.2 Théorèmes généraux sur les suites et les limites

**Exercice 11.** ●○○ Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1,\ 0 \leqslant v_n \leqslant 1 \text{ et } u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Que dire de ces suites ?

**Correction**

Ces deux suites convergent vers 1. En effet, comme pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n v_n \leqslant v_n \leqslant 1.$$

Or, $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Donc, par théorème d'encadrement, $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
De même, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

**Exercice 12.** ●●○ Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites telles que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant a \text{ et } v_n \leqslant b \\ u_n + v_n \to a + b \end{cases}$$

Montrer que $u_n \to a$ et $v_n \to b$.

**Correction**

Là, on va utiliser des $\varepsilon$.
**Soit** $\varepsilon > 0$**.** Comme $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a+b$, on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$,

$$a + b - \varepsilon \leqslant u_n + v_n \leqslant a + b + \varepsilon,$$

donc, si $n \geqslant N$,

$$a - \varepsilon + (b - v_n) \leqslant u_n \leqslant a + \varepsilon + (b - v_n)$$

Mais $b - v_n \geqslant 0$, donc pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant a - \varepsilon$. Or, $u_n \leqslant a$ donc pour tout $N \geqslant N$,

$$a - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant a + \varepsilon.$$

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$.
De même, $v_n = u_n + v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a + b - a = b$.

**Exercice 13.** ●○○

1. Démontrer que pour tout $k$ dans $\mathbb{N}^*$, $\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

**Correction**

Soit $k$ dans $\mathbb{N}^*$. Alors

$$\ln(k+1) - \ln(k) = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k},$$

par étude de fonctions.

2. Déterminer la limite, quand $n$ tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

**Correction**

Soit $n$ dans $\mathbb{N}^*$. Alors

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par minoration.

**Exercice 14.** ●○○ /●●○ Déterminer les limites en $+\infty$ des suites de terme général

1. $\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$
2. $\sqrt[n]{n^2}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2}$
4. $\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

**5.** $\dfrac{\sin(2n)}{\operatorname{th}(3n)}$

**6.** $\dfrac{n^n}{n!}$

**7.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$

**8.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor kx \rfloor}{n^2}$

**Correction**

**1.** On écrit, si $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n} &= \frac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n})}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}} \\ &= \frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}} \\ &= \frac{2n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\end{aligned}$$

**2.** Si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{n^2} &= n^{\frac{1}{n}} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\left(n^2\right)}\end{aligned}$$

Or, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\left(n^2\right) = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$.

**3.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2}$

On peut calculer directement cette somme :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

**4.** $\dfrac{n^n}{n!}$

On écrit $\dfrac{n^n}{n!} = \dfrac{n\times n\times\cdots\times n}{1\times 2\times\cdots\times n}$. L'idée va être de séparer ce produit en 2, avec une partie minorée et une partie qui tend vers $+\infty$. Écrivons

$$\frac{n^n}{n!} = n \times \frac{n^{n-1}}{n!}.$$

Or, $\displaystyle n! = \prod_{k=1}^{n} k = \prod_{k=2}^{n} k \leqslant \prod_{k=2}^{n} n = n^{n-1}$, donc $\dfrac{n^{n-1}}{n!} \geqslant 1$, donc $\dfrac{n^n}{n!} \geqslant n$, donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$.

**5.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$

Bornons chacun des termes de la somme. Si $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\frac{1}{n^2+n^2} \leqslant \frac{1}{n^2+k^2} \leqslant \frac{1}{1+n^2}.$$

En sommant sur $k$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+n^2},$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

soit

$$\frac{n}{2n^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2} \leqslant \frac{n}{n^2+1},$$

or

$$\left.\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n^2} &= 0 \\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+1} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2} = 0 \text{ par encadrement.}$$

**6.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{[kx]}{n^2}$

Encadrons le terme sommé. Par définition, si $k \in [\![1, n]\!]$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$kx - 1 \leqslant [kx] \leqslant kx,$$

donc

$$\frac{kx-1}{n^2} \leqslant \frac{[kx]}{n^2} \leqslant \frac{kx}{n^2}.$$

En sommant sur $k$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{kx-1}{n^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{[kx]}{n^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{kx}{n^2}.$$

Or, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{kx}{n^2} = \frac{xn(n+1)}{2n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{2}$. De même,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{kx-1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{kx}{n^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{xn(n+1)}{2n^2} - \frac{n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{2}.$$

Donc, par encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{[kx]}{n^2} = \frac{x}{2}$$

**Exercice 15.** *Problème d'interversion des limites.* ●◐○
Comparer

$$\lim_{k\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^k, \quad \lim_{n\to+\infty} \lim_{k\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^k \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

**Correction**

**1.** Soit $k$ dans $\mathbb{N}$. Alors, comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^k = 1$.

Donc, pour tout $k$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^k = 1$. Donc

$$\lim_{k\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^k = 1.$$

**2.** Soit $n$ dans $\mathbb{N}^*$. Alors $-1 < 1 - \dfrac{1}{n} < 1$, donc la suite géométrique de raison $1 - \dfrac{1}{n}$ est de limite nulle. Donc $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^k = 0$.

Donc pour tout $n$, $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k = 0$, donc

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{k\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k = 0.$$

**3.**

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e}.$$

**Exercice 16.** *Sur l'indétermination* $1^\infty$. ●◐○
Soit $\ell$ un élément de $\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Déterminer deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ telles que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$, et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^{v_n} = \ell$.

**Correction**

Si $\ell = 0$, posons $v_n = n^2$ et $u_n = \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}$. Alors $u_n^{v_n} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\times n^2} = \mathrm{e}^{-n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Si $\ell > 0$, posons $v_n = n$ et $u_n = \mathrm{e}^{\frac{\ln(\ell)}{n}}$. Alors $u_n^{v_n}$ est la suite constante égale à $\ell$.
Si $\ell = +\infty$, posons $v_n = n^2$ et $u_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$. Alors $u_n^{v_n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\times n^2} = \mathrm{e}^n \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

**Exercice 17.** ●●○ On va démontrer que la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite. On suppose que ce n'est le cas et qu'elle en possède une.

**1.** Démontrer que cette limite est finie. On l'appelle $\ell$.

**Correction**

Si $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite, comme $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, cette limite est nécessairement finie.

**2.** Démontrer que la suite $(\cos(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$, puis que $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

**Correction**

$(\cos(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ donc converge aussi vers $\ell$. Mais on sait que

$$\cos(n+1) = \cos(n)\cos(1) - \sin(n)\sin(1).$$

Comme $\sin(1) \neq 0$, $\sin(n) = \dfrac{\cos(n+1)-\cos(n)\cos(1)}{\sin(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell(1-\cos(1))}{\sin(1)}$.

**3.** Aboutir à une contradiction en échangeant les rôles de sin et de cos.

**Correction**

Notons $\ell'$ la limite de $\sin(n)$. Alors $\ell' = \ell\dfrac{1-\cos(1)}{\sin(1)}$.
Mais $\sin(n+1) = \sin(n)\cos(1) + \sin(1)\cos(n)$. Donc

$$\cos(n) = \frac{\sin(n+1)-\sin(n)\cos(1)}{\sin(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'\frac{1-\cos(1)}{\sin(1)}.$$

Donc

$$\ell = \ell'\frac{1-\cos(1)}{\sin(1)}.$$

Donc $\ell = \ell \left(\dfrac{1-\cos(1)}{\sin(1)}\right)^2$. Or, $\ell \neq 0$ car sinon $\ell' = 0$, donc on aurait $\ell^2 + \ell'^2 = 0$, absurde car $\cos(n)^2 + \sin(n)^2 = 1$. Donc

$$\left(\frac{1-\cos(1)}{\sin(1)}\right)^2 = 1,$$

donc $(1-\cos(1))^2 = \sin(1)^2$, donc $(1-\cos(1))^2 = 1-\cos(1)^2 = (1-\cos(1))(1+\cos(1))$. Mais $\cos(1) \neq 1$, donc $1-\cos(1) = 1+\cos(1)$, donc $\cos(1) = 0$, absurde ! ! ! !
Donc $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne possède pas de limite.

**Exercice 18.** ●●○ Soient $a, b, c$ trois réels tels que pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$,

$$\lfloor an \rfloor + \lfloor bn \rfloor = \lfloor cn \rfloor .$$

Démontrer que $a + b = c$.

**Correction**

Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$,

$$\frac{\lfloor an \rfloor}{n} + \frac{\lfloor bn \rfloor}{n} = \frac{\lfloor cn \rfloor}{n}.$$

donc, en faisant tendre $n$ vers $+\infty$, $a + b = c$ !
(rq : on montre que $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ par encadrement)

**Exercice 19.** ●●◐ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels convergeant vers une limite $\ell$ réelle. A-t-on

$$\lim_{n\to+\infty} \lfloor u_n \rfloor = \lfloor \ell \rfloor \ ?$$

**Correction**

Montrons déjà que si $\ell \notin \mathbb{Z}$, alors $[u_n] \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Si $\ell \notin \mathbb{Z}$, on a $[\ell] < \ell < [\ell] + 1$, donc si $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\min([\ell]+1, [\ell])$ Alors $[\ell] < \ell - \varepsilon < \ell < \ell + \varepsilon < [\ell] + 1$. (Penser qu'on s'est pris une marge afin de rester à l'intérieur de l'intervalel $][\ell], [\ell]+1[$.
Or, $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$ donc on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n$, $\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$. Mais alors si $n \geqslant N$,

$$[\ell] < \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon < [ell] + 1,$$

donc pour tout $n \geqslant N$, $[u_n] = [\ell]$, donc $[u_n]$ est constante égale à $[\ell]$ àpcr, donc $[u_n] \underset{+\infty}{\longrightarrow} [\ell]$.
En revanche, si $\ell \in \mathbb{Z}$, $[u_n]$ tend vers $[\ell]$ si, et seulement si $u_n \geqslant \ell$ àpcr. En effet, si c'est le cas, en posant $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, on a $\ell \leqslant u_n \leqslant \ell + \dfrac{1}{2}$ àpcr, donc $[u_n]$ constante égale àpcr. Si ce n'est pas le cas alors $[u_n]$ possède une suite extraite convergent vers $[\ell] - 1$.

## 2.3 Du côté des sous-suites

**Exercice 20.** ●●○ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

**1.** On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée. Montrer qu'elle admet une suite extraite qui diverge vers $+\infty$.

**Correction**

Par hypothèse, on suppose que

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n > M.$$

Il nous faut alors **construire** une extraction $\varphi$. Construisons-la par récurrence.
**Prenons** $M = 0$ et **prenons** $N = 0$**.** Alors on dispose de $n_0$ dans $\mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > 0$.
**Posons** $\varphi(0) = n_0$**.**
**Supposons** $\varphi(n)$ construite pour un certain $n$. **Prenons** $M = n$ et **prenons** $N = \varphi(n)+1$**.** Alors on dispose de $k_0$ dans $\mathbb{N}$ tel que $k_0 > N$ et $u_{k_0} > n$. **Posons** $\varphi(n+1) = k_0 > \varphi(n)$.
Alors on a construit une fonction $\varphi$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, strictement croissante, car $\varphi(n+1) > \varphi(n)$, et telle que pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} > n$, donc $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

**2.** On suppose que $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite bornée.

**Correction**

Nions « $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ » : on dispose de $M > 0$ tel que

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N,\ |u_n| \leqslant M.$$

Construisons alors, par récurrence, une extraction $\varphi$ telle que pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $|u_{\varphi(n)}| \leqslant M$.
**Initialisation.** Dans la proposition, prenons $N = 0$. Alors on dispose de $n \geqslant 0$ tel que $|u_n| \leqslant M$. Notons $\varphi(0) = n$.
**Hérédité.** Si $\varphi(k)$ a été construite pour un certain $k \in \mathbb{N}$, on prend $N = \varphi(k) + 1$ dans la proposition précédente. Alors on dispose de $n \geqslant \varphi(k) + 1$ tel que $|u_n| \leqslant M$. Posons $\varphi(k+1) = n$. Alors $\varphi(k+1) > \varphi(k)$ et $|u_{\varphi(k+1)}| \leqslant M$.
On a ainsi construit l'extraction désirée.

**Exercice 21.** ●●◐ Soient $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\dfrac{p_n}{q_n}$ converge vers un irrationnel $x$.
Démontrer que $q_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et que $|p_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
*On pourra procéder par l'absurde et par extractions de suites.*

**Correction**

On suppose que $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$.
Alors on dispose d'une sous-suite de $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, qui soit majorée (fait en classe !).
Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on dispose d'une sous-suite de $(q_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, notons-la $(q_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, qui converge.
Mais $(q_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers qui converge, donc elle est stationnaire. En particulier, elle converge vers un entier.
Mais comme $(q_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(q_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ aussi ! Comme il s'agit d'une suite d'entiers, elle est stationnaire donc, en particulier, converge vers un entier. Donc $\dfrac{p_{\varphi\circ\psi(n)}}{q_{\varphi\circ\psi(n)}}$ converge vers un quotient de deux entiers, i.e. vers un rationnel. Donc $x$ est rationnel, absurde !

**Exercice 22.** *Approximation diophantienne*. ●●◐ Si $y$ est un réel, on appelle partie fractionnaire de $y$ la quantité, notée $\{y\}$ et définie par $\{y\} = y - \lfloor y \rfloor$. Soit $x$ un réel.

**1.** Démontrer que : $\forall N \in \mathbb{N},\ \exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ 1 \leqslant q \leqslant N,\ \left| x - \dfrac{p}{q} \right| \leqslant \dfrac{1}{qN}$.
*On appliquera le principe des tiroirs à* $0, \{x\}, \{2x\}, \ldots, \{Nx\}$.

**Correction**

On considère les $N$ intervalles $\left[\dfrac{k}{N}, \dfrac{k+1}{N}\right[$ (fermé si $k = N-1$). Les $N+1$ points $0, \{x\}, \{2x\}, \ldots, \{Nx\}$ appartiennent à ces intervalles, donc, d'après le principe des tiroirs, il existe deux de ces points dans un de ces intervalles, i.e. il existe $k$ et $\ell$ tels que $|\{kx\} - \{\ell x\}| \leqslant \dfrac{1}{N}$. Alors

$$|(k-\ell)x - (\lfloor kx \rfloor - \lfloor \ell x \rfloor)| \leqslant \frac{1}{N},$$

i.e.

$$\left| x - \frac{(\lfloor kx \rfloor - \lfloor \ell x \rfloor)}{(k-\ell)} \right| \leqslant \frac{1}{N(k-\ell)},$$

en supposant $k \geqslant \ell$. En posant $q = k - \ell$, et $p = \lfloor kx \rfloor - \lfloor \ell x \rfloor$, comme $q \leqslant N$,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leqslant \frac{1}{q^2},$$

d'où le résultat !

**2.** En déduire qu'il existe une infinité de couples $(p,q)$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\left| x - \dfrac{p}{q} \right| \leqslant \dfrac{1}{q^2}$.

**Correction**

Si $x$ est rationnel, c'est évident : si $x = \dfrac{a}{b}$, prendre $\dfrac{an}{bn}$ pour tout $n$.
Sinon, si $x$ est irrationnel, on a construit, dans le théorème précédent, une suite $(p_N, q_N)$ telle que pour tout $N$,

$$\left| x - \frac{p_N}{q_N} \right| \leqslant \frac{1}{N q_N}.$$

En particulier $\dfrac{p_N}{q_N} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} x$. Mais $q_N$ est une suite d'entiers. Si elle ne tend pas vers $+\infty$, on peut en extraire une sous-suite bornée $(q_{\varphi(N)})$ (le redémontrer), de laquelle on peut extraire une sous-suite convergente $(q_{\varphi\circ\psi(N)})$. Mais une suite d'entiers convergente est stationnaire, donc $(q_{\varphi\circ\psi(N)})$ est constante à partir d'un certain rang.
Donc $(p_{\varphi\circ\psi(N)})$ est à son tour bornée, donc, possède une sous-suite convergente $(p_{\varphi\circ\psi\circ\theta(n)})$, donc constante àpcr. Donc $\dfrac{p_{\varphi\circ\psi\circ\theta(n)}}{q_{\varphi\circ\psi\circ\theta(n)}}$ est constante àpcr et converge vers $x$, absurde.
Donc $q_N \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, d'où une infinité de $q_N \in [\![1, n]\!]$ vérifiant

$$\left| x - \frac{p_N}{q_N} \right| \leqslant \frac{1}{N q_N} \leqslant \frac{1}{q_N^2}.$$

## 2.4 Caractérisations séquentielles

**Exercice 23.** ●●○ Soit $A$ la partie de $\mathbb{R}$ suivante :

$$A = \left\{ \frac{nm}{n^2 + m^2 + 1}, (n, m) \in \mathbb{N}^2 \right\}.$$

**1.** Montrer que $A$ possède une borne supérieure.

**Correction**

Pour tous entiers $m$ et $n$, $nm \leqslant (n + m + 1)^2$, donc $A$ est majorée par 1. Non vide, cette partie de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

**2.** Déterminer la borne supérieure de $A$.

**Correction**

Montrons que $\sup(A) = \frac{1}{2}$.
Déj§a, si $m$ et $n$ sont deux entiers, on sait que $(m - n)^2 \geqslant 0$, donc $m^2 + n^2 \geqslant 2mn$, donc $2mn < m^2 + n^2 + 1$, donc $\frac{mn}{m^2 + n^2 + 1} < \frac{1}{2}$. Donc $\frac{1}{2}$ est un majorant de $A$.
Définissions la suite $u_n$ par, pour tout entier naturel $n$,

$$u_n = \frac{n^2}{2n^2 + 1}.$$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$. Donc on a bien $\frac{1}{2} = \sup(A)$.

**3.** Montrer que $A$ n'a pas de plus grand élément.

**Correction**

Cette borne supérieure n'est jamais atteinte car si $m$ et $n$ sont des entiers,

$$2mn < m^2 + n^2 + 1.$$

**Exercice 24.** ●○○ Montrer que l'ensemble

$$\left\{ \frac{n}{2^m}, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \right\}$$

est dense dans $\mathbb{R}$.

**Correction**

Soit $x$ un réel. Montrons que la suite $u_n = \frac{[2^n x]}{2^n}$ converge bien vers $x$. On sait que

$$x - \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{[2^n x]}{2^n} \leqslant x.$$

Donc, par théorème d'encadrement, on a le résultat voulu.

## 2.5 Suites récurrentes

**Exercice 25.** ●●○ On considère la suite définie par $u_0 > 3$, et $u_{n+1} = \frac{4u_n - 9}{u_n - 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**1.** Tracer le graphe de $x \longmapsto \dfrac{4x-9}{x-2}$, préciser les points d'intersection avec la droite $y = x$.

**2.** En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et les valeurs éventuelles de sa limite.

**Correction**

Pour montrer que $(u_n)$ est bien définie, montrons qu'elle ne s'annule jamais, en montrant par récurrence que $u_n$ est toujours supérieure strictement à 3 ($\mathcal{P}_n$).
**Initialisation.** $u_0 > 3$
**Hérédité.** Supposons $u_n > 3$ pour un certain $n$. Alors $4u_n - 9 > 3u_n - 6 = 3(u_n - 2)$, donc

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 9}{u_n - 2} > \frac{3(u_n - 2)}{u_n - 2} = 3.$$

**Conclusion.** Héréditaire et vraie au rang 0, $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout entier en vertu du principe de récurrence.

Si $u_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, $u_{n+1}$ converge aussi vers $\ell$. Par règles d'opérations sur les limites $u_{n+1}$ converge aussi vers $\dfrac{4\ell-9}{\ell-2}$. Par unicité de la limite, $\ell = \dfrac{4\ell-9}{\ell-2}$, donc $\ell^2 - 6\ell + 9 = 0$, i.e. $\ell = 3$. Donc si $(u_n)$ converge, elle converge vers 3.

**3.** On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

**Correction**

Soit $n$ dans $\mathbb{N}$. Calculons $v_{n+1}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1} - 3} \\ &= \frac{1}{\dfrac{4u_n - 9}{u_n - 2} - 3} \\ &= \frac{u_n - 2}{4u_n - 9 - 3u_n + 6} \\ &= \frac{u_n - 2}{u_n - 3} = v_n + 1. \end{aligned}$$

Donc $(v_n)$ est arithmétique de raison 1. Donc pour tout entier naturel $n$, $v_n = v_0 + n$, avec $v_0 > 0$.

**4.** Étudier la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Correction**

On en déduit que pour tout entier naturel $n$, $u_n = \dfrac{1}{v_n} + 3$, bien définie car $v_n > 0$. Or, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 3$.

**Exercice 26.** ●●○ Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites réelles, telles que $u_0 < v_0$ et, pour tout entier naturel $n$,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

Montrer que $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent vers une même limite à préciser.

**Correction**

Posons pour tout entier naturel $n$, $a_n = u_n + v_n$ et $b_n = u_n - v_n$. Montrons que ces deux suites sont géométriques. Soit $n$ dans $\mathbb{N}$. Alors

$$a_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} + \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{3u_n + 3v_n}{3} = a_n.$$

Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $u_0 + v_0$. De même,

$$b_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{1}{3}b_n.$$

Donc $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ : $b_n = b_0\frac{1}{3^n}$.
Donc pour tout $n$ entier,

$$u_n = \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{u_0 + v_0 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}{2} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \frac{u_0 + v_0}{2},$$
$$v_n = \frac{a_n - b_n}{2} = \frac{u_0 + v_0 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{2} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \frac{u_0 + v_0}{2}.$$

**Exercice 27.** Soit $(u_n)$ une suite définie par $u_0 > 0$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}$.

**1.** Montrer que $(u_n)$ est croissante.

**Correction**

Soit $n$ un entier naturel. Alors $u_{n+1} - u_n = \mathrm{e}^{-u_n} > 0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

**2.** En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

**Correction**

Croissante, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ou tend vers $+\infty$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie en $+\infty$, alors $\ell = \ell + \mathrm{e}^{-\ell}$, donc $\mathrm{e}^{-\ell} = 0$, ce qui est absurde. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

**3.** On pose, pour tout $n$ entier, $v_n = \mathrm{e}^{u_n}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_{n+1} - v_n) = 1$.

**Correction**

On calcule

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= e^{u_n + e^{-u_n}} - e^{u_n} \\ &= e^{u_n}\left(e^{e^{-u_n}} - 1\right) \end{aligned}$$

Or, si $a_n$ tend vers 0, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1$, donc on écrit

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= e^{u_n}\left(e^{e^{-u_n}} - 1\right) \\ &= \frac{e^{e^{-u_n}} - 1}{e^{-u_n}} \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

**4.** En utilisant le théorème de Cesàro, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\ln(n)}$.

**Correction**

Par le théorème de Cesàro, si $w_n = v_{n+1} - v_n$, on sait que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} w_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} w_n = 1.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{u_n}}{n} = 1.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{e^{u_n}}{n}\right) = 0$, i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(e^{u_n}\right) - \ln(n) = 0$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} = 1.$$

## 2.6 Un peu d'analyse asymptotique

**Exercice 28.** ●○○ Classer les suites suivantes par ordre de négligeabilité.

$$a_n = n^3,\ b_n = 4n - n^3,\ c_n = ne^{3n},\ d_n = \sin\frac{1}{n},\ f_n = ne^n,\ g_n = n^3 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),\ h_n = \frac{n^4 - n^2}{\sqrt{n} + \ln(n)}.$$

**Correction**

On a

$$d_n = o(g_n),\ g_n \sim n^2 = o(h_n),\ h_n = o(a_n),\ a_n = O(b_n) \text{ et } b_n = O(a_n),\ a_n = o(f_n),\ f_n = o(c_n),$$

**Exercice 29.** ●●○ Déterminer, à l'aide des relations de domination, de négligeabilité, et d'équivalence, les limites des suites suivantes

1. $n\left(\sqrt[3]{n+\pi}-\sqrt[3]{n}\right)$
2. $\dfrac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}(3n)}{\sin\frac{1}{n}}$
3. $\dfrac{\sqrt{1+\sin\frac{1}{n}}-1}{e^{1+\frac{1}{n}}-e}$
4. $\sin\left(\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\times(1+3\sqrt{n})^2$
5. $\dfrac{n^n}{(n+1)^n}$
6. $\dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}$

**Exercice 30.** *Une suite définie implicitement*. ●●●

1. Montrer que sur chacun des intervalles $\left]-\dfrac{\pi}{2}+n\pi,\dfrac{\pi}{2}+n\pi\right[$, $n\in\mathbb{N}$, l'équation $\tan(x)=x$ admet une unique solution $x_n$.

**Correction**

Sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}+n\pi,\dfrac{\pi}{2}+n\pi\right[$, la fonction $x\mapsto\tan(x)-x$ est continue, strictment croissante car de dérivée égale à $\tan^2$, et de limite égale à $+\infty$ (respectivement $-\infty$) en $\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ (respectivement $\dfrac{\pi}{2}-n\pi$). Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires strictement monotone aux limites, la fonction $x\mapsto\tan(x)-x$ admet un unique zéro dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}+n\pi,\dfrac{\pi}{2}+n\pi\right[$.

2. Donner un équivalent simple de $x_n$.

**Correction**

Pour tout entier naturel $n$, $-\dfrac{\pi}{2}+n\pi\leqslant x_n\leqslant\dfrac{\pi}{2}+n\pi$, donc

$$-\frac{1}{2n}+1\leqslant\frac{x_n}{\pi n}\leqslant 1+\frac{1}{2n}.$$

Donc, par théorème d'encadrement, $\dfrac{x_n}{\pi n}\underset{+\infty}{\longrightarrow}1$, i.e. $x_n\sim n\pi$.

3. On pose $y_n=\dfrac{\pi}{2}+n\pi-x_n$.
   (a) Déterminer une équation vérifiée par $y_n$.

**Correction**

Calculons $\tan(y_n)$ :

$$\begin{aligned}\tan(y_n)&=\tan\left(\frac{\pi}{2}+n\pi-x_n\right)\quad=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x_n\right)\ \text{ car tan est } \pi-\text{périodique.}\\&=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x_n\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x_n\right)}\\&=\frac{\cos(x_n)}{\sin(x_n)}\\&=\frac{1}{\tan(x_n)}\\&=\frac{1}{x_n}\\&\sim\frac{1}{n\pi}\underset{+\infty}{\longrightarrow}0.\end{aligned}$$

(b) En déduire que $y_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

**Correction**

Donc $\tan(y_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, et $y_n$ est dans $]-\pi/2, \pi/2[$, donc $y_n$ tend vers 0.

(c) Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

**Correction**

On déduit de la question précédente que $\tan(y_n) \sim y_n$, donc $\frac{1}{x_n} \sim y_n$, donc $\frac{1}{n\pi} \sim y_n$, i.e. $y_n = \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $\alpha = \frac{1}{pi}$.

**Indications**

**8** Ce n'est pas si évident de faire un théorème d'encadrement, voilà pourquoi j'ai mis cet exercice dans les « epsilonneries » : prendre un $\varepsilon$, choisir correctement $k$ puis $n$, ou bien $n$ puis $k$. À vous de voir !

**9** Calquer l'exercice fait en cours sur la règle de D'Alembert. Utiliser des $\varepsilon$ et comparer à des suites géométriques.

**10** (a) Non, considérer $n + 2(-1)^n$.

(b) Reprendre la démonstration du théorème de la limite monotone en considérant l'ensemble des termes de la suite.

(c) De même !

**11** Tenter d'encadrer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$].

**12** Repasser très précisément aux $\varepsilon$, et utiliser notamment le fait que $b - v_n \geqslant 0$ pour tout $n$.

**13** Penser à une étude de fonctions pour la première question, à un télescopage pour la seconde.

**14** Penser : aux « quantités conjuguées »] pour les racines, aux formes exponentielles, et aux encadrements pour les sommes. Les (iv), (v), (vii) sont à faire à la fin, beaucoup plus difficiles !

**15** Déclarez bien vos variables.

**16** Penser aux exemples vus en cours avec l'exponentielle.

**17** (a) La suite est bornée...

(b) Utiliser une formule de trigonométrie pour $\cos(a + b)$.

(c) Utiliser une formule de trigonométrie pour $\sin(a + b)$, et penser que $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

**??** Penser à faire des encadrements : $\lfloor x \rfloor] \leqslant x < \lfloor x \rfloor] + 1$ **et**] $x - 1 < \lfloor x \rfloor] \leqslant x$. Penser que pour $n$ dans $\mathbb{N}$, $\lfloor n \rfloor] = n$. Penser enfin que $x \mapsto \lfloor x \rfloor]$ est croissante.

**18** Effectuer encore des encadrements.

**19** Distinguer les cas $\ell \in \mathbb{Z}$ et $\ell \neq Z$. Penser que si $\ell \neq \mathbb{Z}$, $\exists \varepsilon > 0$, $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ ne contient aucun entier (le justifier).

**20** Nier proprement les énoncés et construire des suites extraites comme en cours, par récurrence.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

**21** Faire de l'absurde... en supposant que $q_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} +\infty$.

- montrer qu'il existe une sous-suite de $(q_n)$ bornée.
- montrer qu'il existe une sous-suite de $(q_n)$ convergente.
- montrer qu'il existe une sous-suite de $(q_n)$ constante.

**??** Toujours commencer par calculer les premiers termes, sauf si vous reconnaissez des suites vues en cours (arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2, etc.)

**25** La bonne définition se montre par récurrence. Pour les limites, utliser les règles sur la convergence.

**26** Essayer d'étudier $u_n + v_n$ et $u_n - v_n$ et déterminer la limite de chacune de ces suites.

**27** Utiliser le théorème de la limite monotone pour la 2. Pour la 3, factoriser par $e^{u_n}$] et utliser des taux de variation pour reconnaître une dérivée.

**28** C'est du cours (croissances comparées). Penser à faire un équivalent avant de comparer !

**30** (a) Utiliser le théorème de la bijection

(b) Utiliser le théorème d'encadrement pour les équivalents.

(c) Penser aux formules liant $\tan(x)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.