

MPSI1 – Programme de colles

Semaine 09 – du 24 au 28 novembre 2025

Nombres réels et suites numériques

L'objectif de cette section est de donner une base solide à l'étude des suites réelles. On insiste sur le caractère fondamental de la propriété de la borne supérieure.

Dans l'étude des suites, on distingue nettement les aspects qualitatifs (monotonie, convergence, divergence) des aspects quantitatifs (majoration, encadrement, vitesse de convergence ou de divergence).

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Ensembles de nombres usuels	
Entiers naturels, relatifs, nombres décimaux, rationnels, réels, irrationnels. Approximations décimales d'un réel. Tout intervalle ouvert non vide rencontre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Droite achevée $\mathbb{R}$.	Les constructions des ensembles de nombres usuels (et en particulier celle de $\mathbb{R}$) sont hors programme. Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès.
b) Propriété de la borne supérieure	
Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$. Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure). Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leq b$, $[a, b] \subset X$.	Notations $\sup X$, $\inf X$.
c) Généralités sur les suites réelles	
Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone. Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.	Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.
d) Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite. Unicité de la limite. Suite convergente, divergente. Toute suite convergente est bornée. Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient. Passage à la limite d'une inégalité large. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang. Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Notations $u_n \longrightarrow \ell$, $\lim u_n$. Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle. Utilisation d'une majoration de la forme $ u_n - \ell \leq v_n$, où (v_n) converge vers 0.
e) Suites monotones	
Théorème de la limite monotone. Théorème des suites adjacentes.	
f) Suites extraites	
Suite extraite. Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite. Théorème de Bolzano-Weierstrass.	Utilisation pour montrer la divergence d'une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ , alors (u_n) tend vers ℓ . Principe de démonstration par dichotomie.
g) Traduction séquentielle de certaines propriétés	
Partie dense de $\mathbb{R}$. Caractérisation séquentielle de la densité.	Une partie de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide. Densité de l'ensemble des décimaux, des rationnels, des irrationnels.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Si X est une partie non vide majorée (resp. non majorée) de $\mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de X de limite $\sup X$ (resp. $+\infty$).

Résultats analogues pour X non vide minorée (resp. non minorée).

h) Suites complexes

Brève extension des définitions et résultats précédents.

Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.

Théorème de Bolzano-Weierstrass.

i) Suites particulières

Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.

Pour une relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$, recherche d'une solution constante, détermination des solutions.

Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.

j) Un peu d'asymptotique (ajout par rapport au programme officiel)

Notations o , O , $\sim$

Règles de manipulation des o et des $\sim$

Prépondérances classiques

Équivalents usuels

Équivalent de Stirling

La preuve n'est pas au programme.

Programme de cette colle :

- cours sur les suites numériques et le début de l'arithmétique (vraiment le début).
- exercices sur les suites, pas d'arithmétique. Les suites $u_{n+1} = f(u_n)$ constituent un vivier d'exercices possible, mais l'étude générale, en autonomie, de ces suites, n'est pas l'objet de la colle.

Exemples de questions de cours

1. Passage à la limite dans les inégalités larges.
2. Théorèmes de majoration/minoration/encadrement.
3. Théorème de la limite monotone.
4. Suites adjacentes.
5. Théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{C}$
6. Caractérisation séquentielle de la borne supérieure.
7. Caractérisation séquentielle de la densité.
8. Limites de $\frac{x^n}{n!}$ et de $\frac{n!}{n^n}$.
9. Théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$.
10. Relation de Bézout.