

DM 08+

facultatif, à éventuellement rendre durant le mois de décembre

Ce DM est un bout du sujet X-ENS Mathématiques A 2024. Comme certaines questions utilisent du programme de deuxième année, je mets des indications si nécessaire.

Objectifs Sauf si vous avez beaucoup de temps, il n'est pas raisonnable de tout faire.

- Ce qui est vraiment intéressant : les questions 16 à 19, car elles montrent qu'il y a aussi des choses faisables à X-ENS ! (même si c'est technique)
- Ce qui est intéressant, mais pas évident du tout : la question 20.
- Ce qui est beaucoup + intense : questions 21 à 23 (à faire si vous avez plein plein de temps).

Indications

19c. La question est à comprendre dans le sens « justifier que la suite $\left(\sum_{k \geq 2} \frac{\ln(k)}{k(k-1)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

converge ». On peut admettre que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{3/2}}$ converge.

20b. On admet cette question, qui consiste à dire que $\int_2^a \frac{R(t)}{t(\ln(t))^2} dt$ admet une limite finie lorsque a tend vers $+\infty$.

20c. Par la question précédente, on peut écrire que $\int_0^n \frac{R(t)}{t(\ln(t))^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{R(t)}{t(\ln(t))^2} dt - \int_n^{+\infty} \frac{R(t)}{t(\ln(t))^2} dt$.
On admet de plus que

$$\int_n^{+\infty} \frac{R(t)}{t(\ln(t))^2} dt = O\left(\int_n^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^2} dt\right) = O\left(\frac{1}{\ln(n)}\right).$$

C'est un résultat de deuxième année, appelé intégration des relations de comparaison.

21b. et questions suivantes. On écrit des choses du genre « $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} g(x) + O(\dots)$ » : c'est la même définition que pour les suites.

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Le problème comporte deux parties qui sont indépendantes.

Notations

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.

Si k est un entier naturel tel que $k \leq n$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial correspondant au nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments. Par convention, on pose $\binom{n}{k} = 0$ pour un entier naturel $k > n$.

Si $n \geq 0$ et $d \geq 1$ sont deux entiers naturels, on note $d \mid n$ la relation « d divise n ».

Si x est un réel, on note $E(x)$ sa partie entière, c'est-à-dire l'unique entier $E(x)$ tel que $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

Si p est un nombre premier et n un entier naturel non nul, on note

$$\nu_p(n) = \max\{\nu \in \mathbb{N} : p^\nu \mid n\}.$$

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels.

Pour tout ensemble E , on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

On note $\ln_2$ la fonction de $]1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\ln_2(x) = \ln(\ln(x))$.

Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ désigne une suite de nombres réels, on note, pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n \leq x} a_n = \sum_{n=1}^{E(x)} a_n, \quad \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} a_p = \sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ premier}}}^{E(x)} a_p, \quad \prod_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} a_p = \prod_{\substack{p=1 \\ p \text{ premier}}}^{E(x)} a_p$$

avec la convention que la somme indexée par l'ensemble vide vaut 0 et le produit indexé par l'ensemble vide vaut 1.

On pourra utiliser sans démonstration le fait qu'il existe un réel γ tel que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Deuxième partie

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$\omega(n) = \text{Card}\{p \text{ premier} : p \mid n\} = \sum_{\substack{p \mid n \\ p \text{ premier}}} 1.$$

Par exemple, $\omega(6) = \omega(12) = 2$.

16. Soit $(a_n)_{n \geq 2}$ une suite de nombres réels. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $A(t) = \sum_{2 \leq k \leq t} a_k$. Soit $b : [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$,

$$\sum_{k=2}^n a_k b(k) = A(n)b(n) - \int_2^n b'(t)A(t)dt.$$

17. L'objectif de cette question est de démontrer que si n est un entier naturel non nul, alors $\prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p \leq 4^n$.

17a. Traiter les cas $n \in \{1, 2, 3\}$.

On suppose à présent $n \geq 4$ et le résultat connu au rang k pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$.

17b. Établir le résultat au rang n si n est pair.

17c. Soit $n = 2m + 1$ avec $m \in \mathbb{N}$. Justifier que $\prod_{\substack{m+1 < p \leq 2m+1 \\ p \text{ premier}}} p$ divise $\binom{2m+1}{m}$ et montrer que $\binom{2m+1}{m} \leq 4^m$.

17d. Conclure.

18. Soit n un entier naturel non nul et soit p un nombre premier. Justifier la formule $\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} E\left(\frac{n}{p^k}\right)$ et montrer que

$$\frac{n}{p} - 1 < \nu_p(n!) \leq \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}.$$

19a. Par comparaison avec une intégrale, établir que

$$\sum_{k=1}^n \ln(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \ln(n) - n + O(\ln(n)).$$

19b. Justifier que $n! = \prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p^{\nu_p(n!)}$ et en déduire que

$$n \sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} - n \ln(4) < \ln(n!) \leq n \sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} + n \sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p(p-1)}.$$

19c. Justifier que la série $\sum_{k \geq 2} \frac{\ln(k)}{k(k-1)}$ converge.

19d. Conclure que $\sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + O(1)$.

20a. On pose, pour tout réel $t \geq 2$,

$$R(t) = \sum_{\substack{p \leq t \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} - \ln(t).$$

Montrer, en utilisant le résultat de la question **16**, que

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} = 1 + \ln_2(n) - \ln_2(2) + \frac{R(n)}{\ln(n)} + \int_2^n \frac{R(t)}{t(\ln(t))^2} dt.$$

20b. Justifier que la fonction $t \mapsto \frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$.

20c. Établir que $\sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln_2(n) + c_1 + O\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$, pour un réel $c_1 \in \mathbb{R}$ à préciser.

21a. Soient x un réel positif supérieur ou égal à 1 et $q \in \mathbb{N}^*$. Justifier que la quantité

$$\text{Card} \{n \in \mathbb{N} \cap [1, x] : n \equiv 0 \pmod{q}\} - \frac{x}{q}$$

est bornée en valeur absolue par un réel indépendant de x et de q .

21b. Démontrer, à l'aide d'une interversion de sommes, que $\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \omega(n) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \ln_2(x) + O(1)$.

22a. Montrer que

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} (\omega(n) - \ln_2(x))^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x} \left(\sum_{n \leq x} \omega(n)^2 \right) - \ln_2(x)^2 + O(\ln_2(x)).$$

22b. Montrer que

$$\sum_{n \leq x} \omega(n)^2 = \sum_{\substack{p_1 \leq x \\ p_1 \text{ premier}}} \sum_{\substack{p_2 \leq x \\ p_2 \text{ premier}}} \text{Card} \{n \in \mathbb{N}^* : n \leq x, p_1 \mid n \text{ et } p_2 \mid n\}.$$

22c. Montrer que

$$\left(\sum_{\substack{p_1, p_2 \leq x \\ p_1 \neq p_2 \text{ premiers}}} \text{Card} \{n \in \mathbb{N}^* : n \leq x, p_1 \mid n \text{ et } p_2 \mid n\} \right) - x \ln_2(x)^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(x \ln_2(x)).$$

On pourra estimer le cardinal de l'ensemble des paires de nombres premiers (p_1, p_2) tels que $p_1 p_2 \leq x$ quand x tend vers $+\infty$.

22d. Conclure que $\frac{1}{x} \left(\sum_{n \leq x} (\omega(n) - \ln_2(x))^2 \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(\ln_2(x))$.

23. On pose $\mathcal{S} = \left\{ n \geq 3 : \left| \frac{\omega(n) - \ln_2(n)}{\sqrt{\ln_2(n)}} \right| \geq (\ln_2(n))^{1/4} \right\}$. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \text{Card} \{n \leq x : n \in \mathcal{S}\} = 0.$$

On pourra commencer par écrire $\text{Card}(\mathcal{S} \cap [1, x]) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \text{Card}(\mathcal{S} \cap [\sqrt{x}, x]) + O(\sqrt{x})$ et remarquer que dans la somme du membre de droite, la différence $|\ln_2(n) - \ln_2(x)|$ reste bornée.

On dit alors que l'ensemble $\mathcal{S}$ a densité 0. De même que pour les permutations, on obtient que, en dehors d'un ensemble de densité nulle, $\omega(n) = \ln(\ln(n))(1 + o(1))$.