 nlaillet.math@gmail.com

DM 07
à rendre le lundi 24 novembre

Plan d'étude. En début de DM, merci de préciser la formule que vous avez choisie.

1. **Formule « bases ».** Faire l'exercice d'arithmétique et le problème 1, questions 1 à 6 (2h).
2. **Formule « intermédiaire »** Faire l'exercice d'arithmétique et le problème 1, questions 1 à 10 (3h).
3. **Formule « complète »** Tout faire (4h).

Exercice 1. *Deux questions d'arithmétique*.

1. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, 6 divise $5n^3 + n$.

Correction

On propose 3 preuves : **Preuve 1 : par récurrence.** On montre, pour tout n, $\mathcal{P}_n$: $6|5n^3 + n$.
Initialisation : $5 \times 0^3 + 0 = 0$, divisible par 6.
Hérédité : on suppose que 6 divise $5n^3 + n$. Alors

$$\begin{aligned} 5(n+1)^3 + n + 1 &= 5(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + n + 1 \\ &= 5n^3 + 15n^2 + 15n + 5 + n + 1 \\ &= (5n^3 + n) + 15n(n+1) + 6. \end{aligned}$$

Or, 6 divise $5n^3 + n$ par HR, 6 divise 6 et, parmi n et $n+1$, l'un des deux entiers est pair, donc 2 divise $n(n+1)$ et 3 divise 15 donc 6 divise $15n(n+1)$. Donc 6 divise $5(n+1)^3 + n + 1$, d'où $\mathcal{P}_{n+1}$, d'où l'hérédité et le résultat.
Preuve 2 : par disjonction. Soit n dans $\mathbb{N}$. Alors

- si n est pair, n^3 est pair, donc $5n^3 + n \equiv 0[2]$.
- si n est impair, $n \equiv 1[2]$ donc $n^3 \equiv 1[2]$ donc $5n^3 + n \equiv 0[2]$

De plus,

- si $n \equiv 0[3]$, alors n^3 aussi donc $5n^3 + n \equiv 0[3]$.
- si $n \equiv 1[3]$, alors n^3 aussi donc $5n^3 + n \equiv 5 + 1 \equiv 0[3]$.
- si $n \equiv 2[3]$, alors $n^3 \equiv 8 \equiv 2[3]$ donc $5n^3 + n \equiv 12 \equiv 0[3]$.

Donc, quel que soit le cas considéré, 2 et 3 divisent $5n^3 + n$ donc 6 divise $5n^3 + n$.
Preuve 3 : par calcul malin et disjonction directe. Écrivons

$$5n^3 + n = 6n^3 + n - n^3 = 6n^3 - (n^3 - n) = 6n^3 - n(n^2 - 1) = 6n^3 - n(n-1)(n+1).$$

Or, 6 divise $6n^3$. De plus parmi n, $n-1$ et $n+1$, l'un des trois est pair et l'un des trois est multiple de 3. Donc 6 divise $n(n-1)(n+1)$. Donc 6 divise $5n^3 + n$.

2. Démontrer que $\sqrt[3]{5}$ est irrationnel.

Correction

Supposons que $\sqrt[3]{5}$ soit rationnel. Alors on dispose de $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt[3]{5} = \dfrac{p}{q}$.
Comme $\sqrt[3]{5} > 0$, on a de plus $p > 0$. Donc $5 = \dfrac{p^3}{q^3}$ i.e. $5p^3 = q^3$. Alors

$$v_5(5p^3) = v_5(q^3),$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

i.e.

$$1 + 3v_5(p) = 3v_5(q),$$

ce qui est absurde car l'entier de droite est divisible par 3 et pas celui de gauche !
Donc $\sqrt[3]{5}$ est irrationnel !

Problème 1. Autour des contractions

Le but de ce problème est d'étudier quelques exemples de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Soit $k \in]0,1[$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f est k-contractante, ou que c'est une k-contraction si

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|.$$

Si $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, on dit que g est une k-contraction si

$$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2,\ |g(x) - g(y)| \leqslant k|x-y|.$$

A. Premiers résultats

Soit f une k-contraction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifie $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{C}$, alors $f(a_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$.

Correction

Comme f est une k-contraction,

$$|f(a_n) - f(\ell)| \leqslant k|a_n - \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc $f(a_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$.

2. Démontrer que f a au plus un point fixe.

Correction

Soient ℓ et ℓ' deux points fixes de f. Alors $f(\ell) = \ell$ et $f(\ell') = \ell'$. Donc

$$|\ell - \ell'| = |f(\ell) - f(\ell')| \leqslant k|\ell - \ell'|.$$

Si on avait $|\ell - \ell'| \neq 0$, on aurait $1 \leqslant k$, absurde car $k \in]0,1[$. Donc $|\ell - \ell'| = 0$.

3. On suppose dans cette question que f admet un point fixe ℓ. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant k^n|u_0 - \ell|$. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction

On démontre par récurrence sur n que

$$|u_n - \ell| \leqslant k^n|u_0 - \ell| \qquad (\mathcal{P}_n)$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

L'initialisation est évidente : $|u_0 - \ell| \leqslant k^0 |u_0 - \ell|$.
Ensuite, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| \leqslant k^n |u_0 - \ell|$. Alors

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant k|u_n - \ell| \leqslant k.k^n |u_0 - \ell| = k^{n+1}|u_0 - \ell|,$$

d'où l'hérédité et le résultat par le principe de récurrence.
Ainsi,

$$|u_n - \ell| \leqslant k^n |u_0 - \ell| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ car } |k| < 1,$$

donc, par encadrement, $|u_n - \ell| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

B. Le théorème du point fixe de Banach-Picard

Le but de cette section est de démontrer le joli résultat suivant :

Proposition 1

Soit $k \in]0, 1[$, soit f une k-contraction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Alors f admet un unique point fixe.

Pour démontrer ce résultat, on prend f une contraction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, puis on définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{C}$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n |u_1 - u_0|$. En déduire, à l'aide d'un télescopage, que pour tout $m \leqslant n$ dans $\mathbb{N}$,

$$|u_n - u_m| \leqslant k^m \frac{1 - k^{n-m}}{1 - k} |u_1 - u_0|,$$

puis que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

 nlaillet.math@gmail.com

Correction

Déjà, on sait que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|u_{n+2} - u_{n+1}| = |f(u_{n+1}) - f(u_n)| \leqslant k|u_{n+1} - u_n|$ donc, par récurrence immédiate, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n|u_1 - u_0|$.
Ensuite, si $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leqslant n$,

$$\begin{aligned}
|u_n - u_m| &= \left|\sum_{i=m}^{n-1} u_{i+1} - u_i\right| \\
&\leqslant \sum_{i=m}^{n-1} |u_{i+1} - u_i| \\
&\leqslant \sum_{i=m}^{n-1} k^i|u_1 - u_0| \\
&\leqslant k^m \frac{1 - k^{n-m}}{1 - k}|u_1 - u_0|,
\end{aligned}$$

d'où le résultat souhaité.
On remarque que comme $k \in]0, 1[$, $k^m \dfrac{1 - k^{n-m}}{1 - k} \leqslant \dfrac{1}{1 - k}$, donc pour n quelconque et $m = 0$,

$$|u_n| = |u_n - u_0 + u_0| \leqslant |u_n - u_0| + |u_0| \leqslant \frac{1}{1 - k}|u_1 - u_0| + |u_0|,$$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

5. Conclure qu'il existe une extraction φ et un complexe ℓ tels que $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Correction

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{C}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une suite extraite qui converge.

6. Démontrer que $|u_{\varphi(n)} - u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

7. Démontrer enfin que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, puis que f admet un point fixe. *On pourra remarquer que* $u_n - \ell = u_n - u_{\varphi(n)} + u_{\varphi(n)} - \ell$.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} |u_n - \ell| &= |u_n - u_{\varphi(n)} + u_{\varphi(n)} - \ell| \\ &\leqslant |u_{\varphi(n)} - u_n| + |u_{\varphi(n)} - \ell| \\ &\leqslant k^n \frac{1 - k^{\varphi(n)-n}}{1-k} |u_1 - u_0| + |u_{\varphi(n)} - \ell| \\ &\leqslant \frac{k^n}{1-k} |u_1 - u_0| + |u_{\varphi(n)} - \ell| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

le premier terme étant géométrique et le second tendant vers 0 par convergence de l'extraction !

On en déduit donc que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc $u_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$ et, par continuité de f, $u_{n+1} = f(u_n) \underset{n \to +\infty \to f}{\longrightarrow} (\ell)$, donc, par unicité de la limite, $\ell = f(\ell)$: f admet donc un point fixe.

C. Le cas des semi-contractions

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

Proposition 2

Soit f une semi-contraction, i.e. une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ |f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|.$$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

8. Trouver trois exemples très simples (affines) de fonctions f tels que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge/tende vers $+\infty$/n'ait pas de limite. Ceci permet de comprendre pourquoi on s'intéresse à la limite de $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et pas à celle de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Correction

Si $f : x \mapsto x + 1$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est égale à $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ donc diverge.
Si $f : x \mapsto x$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à 0.
Si $f : x \mapsto -x + 1$, alors $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, $u_3 = 1$, etc, donc la suite n'a pas de limite.

C-I. Le lemme de Fekete

Il s'agit ici d'établir un lemme préliminaire. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs qui est sous-additive, c'est-à-dire que

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \ a_{m+n} \leqslant a_m + a_n.$$

Notre but est de démontrer que $\frac{a_n}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \inf(A)$, où $A = \left\{\frac{a_n}{n}, \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

9. Soit $(n, N) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soient q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de n par N. Démontrer que

$$\frac{a_n}{n} \leqslant \frac{a_N}{N} + \frac{M_N}{n},$$

où $M_N = \max\{a_0, a_1, \dots, a_{N-1}\}$.

Correction

On écrit simplement que

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{n} &= \frac{a_{qN+r}}{n} \\
&\leqslant \frac{a_{qN}+a_r}{n} \text{ par sous-additivité.} \\
&\leqslant \frac{qa_N+a_r}{n} \text{ par récurrence immédiate : } a_{qN} \leqslant a_N + a_{(q-1)N} \leqslant \dots \\
&\leqslant \frac{q}{qN+r}a_N + \frac{a_r}{n} \\
&\leqslant \frac{q}{qN}a_N + \frac{a_r}{n} \\
&\leqslant \frac{a_N}{N} + \frac{a_r}{n} \\
&\leqslant \frac{a_N}{N} + \frac{M_N}{n},
\end{aligned}$$

car $r \in [\![0, N-1]\!]$, donc $a_r \leqslant \max\{a_0, \dots, a_{N-1}\}$.

10. Démontrer alors que $\frac{a_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \inf(A)$. (en justifiant que $\inf(A)$ existe bien)
On aura intérêt à utiliser les ε, et notamment une bonne caractérisation de la borne inférieure.

Correction

Déjà, A est une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ donc admet une borne inférieure.
Ensuite, soit $\varepsilon > 0$. Alors on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{a_N}{N} \leqslant \inf(A) + \frac{\varepsilon}{2}$.
Soit ensuite $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N'$, $\frac{M_N}{n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Soit $n \geqslant N'$. Alors

$$0 \leqslant \frac{a_n}{n} \leqslant \inf(A) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \inf(A) + \varepsilon,$$

d'où la convergence de $\frac{a_n}{n}$ vers $\inf(A)$!

C-II. Deux autres résultats préliminaires

11. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite tendant vers $+\infty$. Démontrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant N$ tel que

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ v_n \geqslant v_k.$$

Correction

C'est un petit twist par rapport à ce que l'on connaît de la limite infinie ! Soit $N \in \mathbb{N}$. Prenons $M = 1 + \max_{0 \leqslant k \leqslant N} v_k$.
Alors on dispose de $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N'$, $u_n \geqslant M$. $N' \geqslant N$ car tous les u_k pour $k \leqslant N$ sont strictement inférieurs à M.
Considérons alors $M' = \max\{u_k, k \leqslant N'\}$. On dispose de n tel que $u_n = M'$. Comme $M' \geqslant u_N$, on sait que $u_n \geqslant M$ donc $n \geqslant N$.
Ainsi, $n \geqslant N$ et $u_n \geqslant M' \geqslant \max\{u_k, k \leqslant n\}$.

12. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite sous-additive, telle que $\dfrac{a_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A > 0$. Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout N dans $\mathbb{N}$, il existe $n \geqslant N$ tel que

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ a_n \geqslant a_{n-k} + (A - \varepsilon)k.$$

On pourra commencer en déterminant la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $a_n - n(A - \varepsilon)$.

Correction

Soit $N \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. On remarque que

$$\frac{a_n - n(A-\varepsilon)}{n} = \frac{a_n}{n} - (A - \varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon > 0,$$

donc $a_n - n(A - \varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Par la question précédente, on dispose de $n \geqslant N$ tel que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], a_n - n(A - \varepsilon) \geqslant a_{n-k} - (n - k)(A - \varepsilon).$$

Ainsi, pour k dans $[\![0, n]\!]$,

$$a_n \geqslant a_{n-k} + k(A - \varepsilon).$$

C-III. Démonstration de la proposition

On note, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $d_n = |u_n - u_0| = |u_n|$ (on rappelle que l'on a supposé $u_0 = 0$).

13. Démontrer que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite sous-additive, puis que $\left(\dfrac{d_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note A sa limite.

Correction

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Alors

$$\begin{aligned} d_{n+m} &= |u_{n+m} - u_0| \\ &= |u_{n+m} - u_n + u_n - u_0| \\ &\leqslant |u_{n+m} - u_n| + |u_n - u_0| \end{aligned}$$

Or,

$$|u_{n+m} - u_n| = |f(u_{n+m-1}) - f(u_{n-1})| \leqslant |u_{n+m-1} - u_{n-1}| \leqslant \cdots \leqslant |u_m - u_0|,$$

par récurrence immédiate. Ainsi,

$$d_{n+m} \leqslant |u_m - u_0| + |u_n - u_0| = d_m + d_n.$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Donc la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sous-additive. Ainsi, $\left(\dfrac{d_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, par le lemme de Fekete.

14. Justifier que si $A = 0$, la proposition est démontrée.

Correction

Si $A = 0$, alors $\dfrac{u_n - u_0}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où le résultat désiré.

On suppose désormais que $A > 0$.

15. Démontrer, en utilisant la question 12., qu'il existe une suite $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 et une suite d'entiers $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$, tendant vers $+\infty$, telles que pour tout i,

$$\forall \ell \leqslant n_i,\ d_{n_i} \geqslant d_{n_i-\ell} + (A - \varepsilon_i)\ell,$$

et telle que la suite $(u_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ soit de signe constant.

Correction

Par la question 12., on sait que pour tout N dans $\mathbb{N}$, on dispose de $n \geqslant N$ tel que $\forall k \in [\![0, n]\!],\ d_n \geqslant d_{n-k} + (A - \varepsilon)k$.
On construit alors une extraction φ de la sorte :

- pour $n = 0$, posons $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2^0}$. Alors on dispose de $\varphi(0) \geqslant 0$ tel que $\forall \ell \leqslant \varphi(0),\ d_{\varphi(0)} \geqslant d_{\varphi(0)-\ell} + (A - \varepsilon_0)\ell$
- si $\varphi(n)$ est construit, on prend $\varepsilon_{n+1} = \dfrac{1}{2^{n+1}}$ et $N = \varphi(n) + 1$, on dispose de $m \geqslant N$ tel que
$$\forall \ell \leqslant m,\ d_m \geqslant d_{m-\ell} + (A - \varepsilon_{n+1})\ell,$$
on pose alors $\varphi(n + 1) = m$.
On a donc construit une extraction φ qui satisfait presque toutes les propriétés désirées. Mais $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ contient ou bien une infinité de termes strictement positifs, ou bien une infinité de termes strictement négatifs. Ceci permet de conclure la preuve de la propriété.

Supposons que pour tout i dans $\mathbb{N}$, $u_{n_i} > 0$. On va démontrer, à l'aide de cette suite, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant.

16. Soit $i \in \mathbb{N}$. Démontrer que, pour tout $\ell \leqslant n_i$,

$$-u_\ell \leqslant |u_\ell - u_{n_i}| - |u_{n_i}| \leqslant d_{n_i-\ell} - d_{n_i} \leqslant -\left(A - \varepsilon_i\right)\ell.$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Correction

Soit $\ell \leqslant n_i$. Alors

$$\begin{aligned}
-u_\ell &= u_{n_i} - u_\ell - u_{n_i} \\
&\leqslant |u_{n_i} - u_\ell| - |u_{n_i}| \\
&\leqslant |f(u_{n_i-1}) - f(u_{\ell-1})| - |u_{n_i}| \\
&\leqslant |u_{n_i-1} - u_{\ell-1}| - |u_{n_i}| \\
&\leqslant \dots \text{ (récurrence immédiate)} \\
&\leqslant |u_{n_i-\ell} - u_0| - |u_{n_i}| \\
&\leqslant d_{n_i-\ell} - d_{n_i} \\
&\leqslant -(A - \varepsilon_i)\ell.
\end{aligned}$$

D'où le résultat à démontrer.

17. Conclure alors que $u_\ell \geqslant 0$ pour tout ℓ puis que $\dfrac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$. Comment adapter le cas où $(u_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ est toujours strictement négative ?

Correction

On en déduit que si $\ell \geqslant 0$ et $n_i \geqslant \ell$, alors $-u_\ell \leqslant -(A-\varepsilon_i)\ell$, donc $u_\ell \geqslant (A-\varepsilon_i)\ell \geqslant 0$.
Ainsi, $u_\ell \geqslant 0$ pour tout ℓ.
Mais alors, $\dfrac{u_\ell}{\ell}$ est une suite positive, donc, pour tout ℓ dans $\mathbb{N}$, $\dfrac{u_\ell}{\ell} = \dfrac{d_\ell}{\ell} \underset{\ell\to+\infty\to A}{\longrightarrow}$.
Si $(u_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ est toujours strictement négative, alors on écrit

$$u_\ell = u_\ell - u_{n_i} + u_{n_i} \leqslant |u_{n_i} - u_\ell| - |u_{n_i}|,$$

et on est ramenés au problème précédent.