X-ENS 2024

Épreuve de mathématiques A, MP & MPI, quatre heures
(corrigé)

Première partie

1. (a) La matrice $-M_0$ est symétrique réelle, donc par le théorème spectral elle est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont orthogonaux. De plus :

$$-M_0 - \mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} -1 & & -1 \\ \vdots & & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

est de rang 1, donc par le théorème du rang le sous-espace propre de $-M_0$ associé à la valeur propre 1 est de dimension $n-1$. Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ la dernière valeur propre de M_0 (il ne peut y en avoir strictement plus que deux, pour des raisons dimensionnelles). On a : $\mathrm{tr}(-M_0) = 0 = (n-1) \times 1 + \lambda$, donc : $\lambda = 1 - n$. En conclusion :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(-M_0) = \{1-n, 1\},$$

où 1 est valeur propre d'ordre de multiplicité $n-1$ et $1-n$ est une valeur propre simple. Comme la somme des coefficients de chaque ligne est égale à $1-n$, on en déduit de plus que $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $-M_0$ associé à 1, et pour une raison dimensionnelle c'est un générateur du sous-espace propre associé. Comme $-M_0$ est symétrique réelle, on en déduit le second sous-espace propre en considérant le supplémentaire orthogonal du premier :

$$\ker(-M_0 - (1-n)\mathrm{I}_n) = \mathrm{Vect}(U), \quad \ker(-M_0 - \mathrm{I}_n) = \mathrm{Vect}(U)^{\perp}.$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Si, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, l'on note $m_{i,j}$ le coefficient d'indice (i,j) de M_x, alors on remarque que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et tout $i \in [\![1,n]\!]$ on a :

$$m_{i,\sigma(i)} = \begin{cases} x & \text{si } i = \sigma(i), \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et donc :

$$\det(M_x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} m_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{\substack{i=1 \\ i=\sigma(i)}}^{n} m_{i,\sigma(i)} \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq\sigma(i)}}^{n} m_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x^{\nu(\sigma)}.$$

Mais on a aussi, grâce à la définition de M_x et la question précédente :

$$\det(M_x) = \det(x\mathrm{I}_n + M_0) = \chi_{-M_0}(x) \overset{(q.\,1.(a))}{=} (x-1)^{n-1}(x+n-1),$$

d'où le résultat :

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x^{\nu(\sigma)} = (x-1)^{n-1}(x+n-1).$$

2. On obtient ces trois sommes respectivement en évaluant en 1 (même si, dans le cas de la première somme, on peut s'en sortir autrement), en dérivant et en intégrant, la somme de la question précédente. On a alors :

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) = 0,$$

puis, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\nu(\sigma)x^{\nu(\sigma)-1} = (n-1)(x-1)^{n-2}(x+n-1) + (x-1)^{n-1},$$

et :

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{\nu(\sigma)+1} = \int_0^1 (x-1)^{n-1}(x+n-1)\mathrm{d}x = \left[\frac{(x-1)^n}{n}(x+n-1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(x-1)^n}{n}\mathrm{d}x.$$

On déduit aisément de ces deux relations :

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\nu(\sigma) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 2 \\ 0 & \text{si } n \geqslant 3 \end{cases}, \quad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{\nu(\sigma)+1} = (-1)^{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

Remarque. Il n'est pas nécessaire de dériver explicitement la somme pour montrer qu'elle est nulle pour $n \geqslant 3$. Il suffit de constater que c'est un polynôme ayant 1 comme racine au moins double : sa dérivée s'y annule donc.

3. Comme $\varepsilon(\mathfrak{S}_n) = \{1, -1\}$, on a :

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \varepsilon(\sigma)=1}} \varepsilon(\sigma) + \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \varepsilon(\sigma)=-1}} \varepsilon(\sigma) = \operatorname{card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\} - \operatorname{card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \varepsilon(\sigma) = -1\},$$

mais d'après la question précédente cette somme est également nulle. On en déduit :

$$\operatorname{card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\} = \operatorname{card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \varepsilon(\sigma) = -1\}.$$

On en déduit par ailleurs, ces deux ensembles partitionnant $\mathfrak{S}_n$, que si $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme sur $\mathfrak{S}_n$ alors :

$$\mathbb{P}(\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\}) = \mathbb{P}(\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \varepsilon(\sigma) = -1\}) = \frac{1}{2}.$$

4. Par définition, si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, alors on a $\sigma \in \mathfrak{D}_n$ si et seulement si $\nu(\sigma) = 0$. Cela implique :

$$(x-1)^{n-1}(x+n-1) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)x^{\nu(\sigma)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{D}_n} \varepsilon(\sigma) + \sum_{\sigma \notin \mathfrak{D}_n} \varepsilon(\sigma)x^{\nu(\sigma)}$$

et après évaluation en 0 tous les termes de la dernière somme sont nuls, donc :

$$(-1)^{n-1}(n-1) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{D}_n} \varepsilon(\sigma) = \operatorname{card}\{\sigma \in \mathfrak{D}_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\} - \operatorname{card}\{\sigma \in \mathfrak{D}_n \mid \varepsilon(\sigma) = -1\},$$

d'où le résultat :

$$\operatorname{card}\{\sigma \in \mathfrak{D}_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\} = \operatorname{card}\{\sigma \in \mathfrak{D}_n \mid \varepsilon(\sigma) = -1\} + (-1)^{n-1}(n-1).$$

5. (a) Ces deux familles sont bien dans $\mathbb{R}_m[X]$, échelonnées en degré donc libres, de cardinal $m+1 = \dim(\mathbb{R}_m[X])$: ce sont donc des bases de $\mathbb{R}_m[X]$.

   (b) Par la formule du binôme de Newton, on a :

$$\forall j \in [\![0, m]\!], \quad X^j = ((X-1)+1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i}(X-1)^i = \sum_{i=0}^{m} \binom{j}{i}(X-1)^i,$$

   donc le coefficient (i, j) de la matrice l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_m[X]$, relativement aux bases $(1, X, \ldots, X^m)$ au départ et $(1, X-1, \ldots, (X-1)^m)$ à l'arrivée, pour tout $(i, j) \in [\![0, m]\!]^2$, est $\binom{j}{i}$. Cela donne bien la matrice transposée de M, dont le coefficient (i, j) est par définition $\binom{i}{j}$: d'où le résultat.

(c) Comme l'application identité est inversible (d'inverse elle-même), sa matrice relativement à n'importe quelles bases est inversible, donc $M^\top$ l'est par la question précédente et M aussi. L'inverse de $M^\top$ s'obtient en écrivant la transposée la matrice de l'application réciproque, c'est-à-dire toujours l'application identité, avec les bases $(1, X, \ldots, X^m)$ à l'arrivée et $(1, X-1, \ldots, (X-1)^m)$ au départ (on inverse). Or, toujours par la formule du binôme de Newton, on a :

$$\forall j \in [\![0, m]\!], \quad (X-1)^j = \sum_{i=0}^{m} \binom{j}{i} (-1)^{j-i} X^i,$$

donc le coefficient (i, j) de $(M^\top)^{-1}$ est : $(-1)^{j-i}\binom{j}{i}$. En transposant, on en déduit :

$$M^{-1} = \left(\left((-1)^{i-j}\binom{i}{j} \right)\right)_{0\leqslant i,j\leqslant m} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{m-1}\binom{m-1}{0} & & & & \binom{m-1}{m-1} & 0 \\ (-1)^m\binom{m}{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{m}{m} \end{pmatrix}.$$

(d) Soient $(u_0, \ldots, u_m)$ et $(v_0, \ldots, v_m)$ dans $\mathbb{R}^{m+1}$. On suppose : $\forall k \in [\![0, m]\!]$, $u_k = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} v_\ell$. Cette relation s'écrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}.$$

On identifie coefficient par coefficient, grâce à l'expression des coefficients de M^{-1} trouvée dans la question précédente. Cela donne :

$$\forall k \in [\![0, m]\!], \quad v_k = \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^{k-\ell} \binom{k}{\ell} u_\ell,$$

d'où le résultat.

6. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, soit $\mathscr{P}_k$ l'ensemble des parties à k éléments de $[\![1, n]\!]$. En partitionnant $\mathfrak{S}_n$ selon le nombre de points fixes de ses éléments, on a :

$$\mathfrak{S}_n = \bigsqcup_{k=0}^{n} \bigsqcup_{I \in \mathscr{P}_{n-k}} \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ \sigma(i) = i \iff i \in I\}.$$

En comparant les cardinaux, et en utilisant le fait qu'une permutation fixant I induise un dérangement sur son complémentaire (c'est utilisé pour l'égalité $(*)$ ci-dessous), on obtient :

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \sum_{I \in \mathscr{P}_{n-k}} \operatorname{card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ \sigma(i) = i \iff i \in I\} \overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{n} \sum_{I \in \mathscr{P}_{n-k}} D_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k.$$

En appliquant la question précédente (où il faut simplement adapter les notations : (ℓ, k, m) devient (k, n, n)), on obtient :

$$D_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!},$$

d'où le résultat.

7. (a) On a : $Y_n(\mathfrak{D}_n) \subseteq \{-1, 1\}$, et donc :

$$\mathrm{P}(Y_n = 1) + \mathrm{P}(Y_n = -1) = 1.$$

On a aussi, par la question 4 :

$$\mathrm{P}(Y_n = 1) - \mathrm{P}(Y_n = -1) = (-1)^{n-1} \frac{n-1}{D_n}.$$

En sommant ou soustrayant ces deux égalités :

$$\mathrm{P}(Y_n = 1) = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^{n-1}\frac{n-1}{D_n}\right), \quad \mathrm{P}(Y_n = -1) = \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^{n-1}\frac{n-1}{D_n}\right),$$

d'où la loi de Y_n (notons que D_n n'est jamais nul puisque les n-cycles sont des dérangements de $\mathfrak{S}_n$).

(b) Par la question 6, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{D_n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1},$$

donc : $D_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n! e^{-1}$. La question précédente permet alors aisément d'obtenir :

$$\forall \varepsilon \in \{-1, 1\}, \quad \lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}(Y_n = \varepsilon) = \frac{1}{2}.$$

8. (a) On a : $Z_n(\mathfrak{S}_n) = [\![0, n]\!]$. De plus, en utilisant le fait que la probabilité P considérée soit uniforme, ainsi que celui déjà mentionné à la question 6 qu'une permutation induit un dérangement sur son support (et qu'il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir ce support, si la permutation admet k points fixes), on a :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathrm{P}(Z_n = k) = \frac{\mathrm{card}(Z_n = k)}{n!} = \frac{\binom{n}{k} D_{n-k}}{n!} \overset{(q.\,6)}{=} \frac{(n-k)! \frac{n!}{(n-k)!k!}}{n!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!},$$

c'est-à-dire :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathrm{P}(Z_n = k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

(b) En reprenant le raisonnement de la question 7.(b), on trouve :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}(Z_n = k) = \frac{e^{-1}}{k!}.$$

(c) On nous demande de calculer l'espérance de Z_n. Passer par l'expression de la question précédente nécessiterait le calcul d'une vilaine double somme : pas le plus avisé. Il est préférable de remarquer que si l'on note :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad A_i = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(i) = i\},$$

alors : $Z_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}$. Par linéarité de l'espérance : $\mathrm{E}(Z_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left(\mathbb{1}_{A_i}\right)$. Or, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a : $\mathbb{1}_{A_i} \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)$, puisque :

$$\mathrm{P}(A_i) = \frac{\operatorname{card}(A_i)}{\operatorname{card}(\mathfrak{S}_n)} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

On utilise le fait que si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ vérifie : $\sigma(i) = i$, alors σ induit une permutation de $[\![1,n]\!] \setminus \{i\}$. On en déduit :

$$\mathrm{E}(Z_n) = n \times \frac{1}{n} = 1.$$

Sa limite est évidemment 1 lorsque n tend vers l'infini.

9. On peut procéder par recensement exhaustif pour $n = 2$ et $n = 3$. On a :

$$(1\ 2) = (1\ 2), \quad \mathrm{Id}_{[\![1,2]\!]} = (1) \circ (2),$$

et :

$$(1\,2\,3) = (1\,2\,3), \quad (1\,3\,2) = (1\,3\,2), \quad (1\,2) = (1\,2)\circ(3), \quad (1\,3) = (1\,3)\circ(2), \quad (2\,3) = (2\,3)\circ(1),$$
$$\mathrm{Id}_{[\![1,3]\!]} = (1) \circ (2) \circ (3).$$

On trouve alors sans mystère :

$$\frac{1}{2!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} \omega(\sigma) = \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{3!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \omega(\sigma) = \frac{11}{6}.$$

On conviendra que c'est assez laborieux. Il vaut mieux être méthodique pour $n = 4$. Pour cela, on note que les éléments de $\mathfrak{S}_4$ sont :

- l'identité (qui vérifie $\omega(\mathrm{Id}_{[\![1,4]\!]}) = 4$) ;
- les transpositions (qui vérifient $\omega(\sigma) = 3$), et il y en a $\binom{4}{2} = 6$;
- les doubles transpositions (qui vérifient $\omega(\sigma) = 2$), et il y en a $\frac{1}{2}\binom{4}{2} = 3$;
- les 3-cycles (qui vérifient $\omega(\sigma) = 2$), et il y en a $\binom{4}{3}2! = 8$;
- les 4-cycles (qui vérifient $\omega(\sigma) = 1$), et il y en a $\binom{4}{4}3! = 6$;

En regroupant les permutations ayant la même structure, on a donc :

$$\frac{1}{4!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4} \omega(\sigma) = \frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 8 + 1 \cdot 6}{4!} = \frac{25}{12}.$$

10. Le nombre $s(n,n)$ désigne le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ ayant exactement n cycles : pour des raisons combinatoires naïves, ces cycles doivent être de longueur 1 et donc une permutation ayant n cycles est l'identité. Une seule permutation convient, d'où : $s(n,n) = 1$.
En revanche, $s(n,1)$ compte les permutations de $\mathfrak{S}_n$ ayant exactement un cycle : ce n'est possible que s'il s'agit d'un n-cycle. Ainsi $s(n,1)$ compte le nombre de n-cycles de $\mathfrak{S}_n$.
Or il y a $(n-1)!$ cycles de longueur n dans $\mathfrak{S}_n$: en effet, pour définir un tel cycle σ, il suffit de choisir une permutation τ de $[\![2,n]\!]$ pour poser : $\sigma = (1\ \tau(2) \cdots \tau(n))$ (il y a $(n-1)!$ tels choix de τ). On obtient ainsi tous les n-cycles possibles, puisqu'il est toujours possible de débuter leur écriture par 1 quitte à effectuer une permutation circulaire.
En résumé :

$$s(n,n) = 1, \quad s(n,1) = (n-1)!.$$

À présent, soit $k \in [\![2,n]\!]$. On cherche à établir une relation entre $s(n,k)$, $s(n-1,k-1)$ et $s(n-1,k)$. L'idée est qu'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ayant exactement k points fixes peut se construire ainsi :

— on impose sa valeur en 1, et ensuite :
  — soit on a $\sigma(1) = 1$, auquel cas on définit ensuite σ en considérant une permutation de $[\![2, n]\!]$ ayant exactement $k-1$ points fixes (il y a $s(n-1, k-1)$ possibilités) ;
  — soit on a $\sigma(1) = \ell$ avec $\ell \in [\![2, n]\!]$ (ce qui fait $n-1$ possibilités pour la valeur de $\sigma(1)$), auquel cas on définit ensuite σ en considérant une permutation de $[\![2, n]\!]$ ayant exactement k points fixes (il y a $s(n-1, k)$ possibilités).

Par principe additif et multiplicatif, on obtient alors l'identité voulue.
Si l'on souhaite formaliser ce raisonnement, il suffit d'introduire l'application :

$$f : \begin{cases} (X_n = k) & \to & [\![1, n]\!] \\ \sigma & \mapsto & \sigma(1) \end{cases},$$

de constater qu'elle est surjective, et de conclure en comparant les cardinaux dans l'égalité : $(X_n = k) = \bigsqcup_{\ell=1}^{n} f^{-1}(\{\ell\})$. Puisque $f^{-1}(\{1\}) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(1) = 1,\ \omega(\sigma) = k\}$, on se convainc aisément que $f^{-1}(\{1\})$ et $(X_{n-1} = k-1)$ sont en bijection *via* :

$$\begin{cases} f^{-1}(\{1\}) & \to & (X_{n-1} = k-1) \\ \sigma & \mapsto & \tau \circ \sigma_{|[\![2,n]\!]} \circ \tau^{-1} \end{cases},$$

où τ est l'application définie de $[\![2, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ par $i \mapsto i-1$. Raisonnement analogue pour démontrer que $f^{-1}(\{\ell\})$ est en bijection avec $(X_{n-1} = k)$ dès que $\ell \geqslant 2$. On a donc :

$$\begin{aligned} s(n,k) = \operatorname{card}(X_n = k) = \sum_{\ell=1}^{n} f^{-1}(\{\ell\}) &= \operatorname{card}(X_{n-1} = k-1) + \sum_{\ell=2}^{n} \operatorname{card}(X_{n-1} = k) \\ &= s(n-1, k-1) + (n-1)s(n-1, k). \end{aligned}$$

Il ne fait pas de doute, selon moi, que le raisonnement combinatoire en langage ordinaire esquissé plus haut contenterait les correcteurs de ce problème.

Remarque. Nous adopterons la convention $s(n, 0) = 0$ pour tout n entier naturel non nul. On remarque alors que l'identité démontrée dans cette question reste valable pour $k = 1$, puisque : $(n-1)s(n-1, 1) = (n-1)(n-2)! = (n-1)! = s(n, 1)$. De même, si l'on pose par convention $s(n, n+1) = 0$ pour tout n, l'identité ci-dessus reste valable pour $k = n$.

11. Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous allons démontrer le cas voulu par récurrence sur n, le cas $n = 1$ étant immédiat puisque $s(1, 1)x = x = \prod_{i=0}^{0}(x+i)$.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On suppose : $\prod_{i=0}^{n-1}(x+i) = \sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^k$. On a alors :

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^{n}(x+i) = (x+n)\prod_{i=0}^{n-1}(x+i) = (x+n)\sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^k &= \sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^{k+1} + \sum_{k=1}^{n} ns(n,k)x^k \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} s(n,k-1)x^k + \sum_{k=1}^{n} ns(n,k)x^k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (s(n,k-1) + ns(n,k))x^k, \end{aligned}$$

où nous adoptons la convention de la question précédente pour les valeurs de $s(n, 0)$ et $s(n, n+1)$. Par la question précédente (où l'on remplace (k, n) par $(k, n+1)$, qui vérifie bien l'inégalité voulue pour $k \in [\![1, n+1]\!]$), on a donc :

$$\prod_{i=0}^{n}(x+i) = \sum_{k=1}^{n+1} s(n+1,k)x^k,$$

d'où le résultat au rang $n+1$. Par principe de récurrence, on a montré :

$$\prod_{i=0}^{n-1}(x+i)=\sum_{k=1}^{n}s(n,k)x^k.$$

12. Par définition de l'espérance, on a :

$$\mathrm{E}(X_n)=\sum_{k=1}^{n}k\mathrm{P}(X_n=k)=\sum_{k=1}^{n}k\frac{s(n,k)}{n!}.$$

Or par la question précédente, comme $\mathbb{R}$ est infini, on a : $\displaystyle\prod_{i=0}^{n-1}(X+i)=\sum_{k=1}^{n}s(n,k)X^k$. Donc après dérivation :

$$\sum_{k=1}^{n}ks(n,k)X^{k-1}=\sum_{j=0}^{n-1}\prod_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n-1}(X+i). \tag{1}$$

Évaluons cette égalité en 1. On obtient :

$$\mathrm{E}(X_n)=\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n-1}\prod_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n-1}(1+i)=\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j+1}\prod_{i=0}^{n-1}(1+i)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j+1}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}.$$

Par le résultat admis dans l'introduction de l'énoncé, on conclut :

$$\mathrm{E}(X_n)=\ln(n)+\gamma+\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

13. (a) On dérive la relation (1) de la question précédente. On obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}k(k-1)s(n,k)X^{k-2}=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n-1}\prod_{\substack{i=0\\i\notin\{j,k\}}}^{n-1}(X+i).$$

En évaluant en 1 :

$$\sum_{k=1}^{n}k(k-1)s(n,k)=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n-1}\prod_{\substack{i=0\\i\notin\{j,k\}}}^{n-1}(1+i)=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n-1}\frac{n!}{(j+1)(k+1)},$$

d'où :

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}k(k-1)s(n,k)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\frac{1}{jk}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{jk}-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}.$$

Quitte à renommer les indices de sommation, on reconnaît le résultat demandé.

(b) On le déduit trivialement des deux questions précédentes, en écrivant : $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $k^2=k(k-1)+k$.

14. (a) On reconnaît l'espérance de X_n^2, à condition de regrouper par paquets les $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ ayant le même nombre de points fixes. Ce faisant, on obtient :

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)^2=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\\omega(\sigma)=k}}\omega(\sigma)^2=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}k^2s(n,k).$$

Par la question précédente :

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)^2=\mathrm{E}(X_n)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{ij}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}.$$

Estimons chacun de ces termes. Le terme $\mathrm{E}(X_n)$ a été évalué à la question 12. Le troisième terme est une somme partielle de série de Riemann convergente. On a de plus, par exemple *via* une comparaison série intégrale :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}-\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i^2}=\sum_{i=n+1}^{+\infty}\frac{1}{i^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n},$$

donc, si l'on pose $c_0=\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i^2}$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}=c_0+\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)=c_0+\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

Il reste donc à estimer la double somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{ij}$. On y parvient grâce au résultat admis dans l'énoncé :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{ij}=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)^2=\left(\ln(n)+\gamma+\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2=(\ln(n))^2+2\gamma\ln(n)+\gamma^2+\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

En combinant tout ce qui précède, on a donc :

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)^2=\ln(n)+\gamma+(\ln(n))^2+2\gamma\ln(n)+\gamma^2-c_0+\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right),$$

d'où le résultat en réarrangeant les termes et en posant $c=-c_0+\gamma+\gamma^2$:

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)^2=(2\gamma+1)\ln(n)+c+(\ln(n))^2+\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

(b) Développons le carré du terme général et utilisons les questions précédentes. On a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(\omega(\sigma)-\ln(n))^2&=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)^2-\frac{2\ln(n)}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)+(\ln(n))^2\\&=(2\gamma+1)\ln(n)+c+2(\ln(n))^2-\frac{2\ln(n)}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)+\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).\end{aligned}$$

Grâce à un regroupement en paquets analogue à celui de la question précédente, on constate que l'on a : $\displaystyle\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)=\mathrm{E}(X_n)$. La question 12 permet alors d'écrire :

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(\omega(\sigma)-\ln(n))^2=(2\gamma+1)\ln(n)+c+2(\ln(n))^2-2\ln(n)\left(\ln(n)+\gamma+\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

d'où le résultat après simplification :

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(\omega(\sigma)-\ln(n))^2=\ln(n)+c+\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

15. Soient $\varepsilon>0$ et $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ (l'énoncé considère $n\geqslant 1$, mais c'est une coquille puisque pour $n=1$ la division par $\ln(n)$ n'est pas définie). Par l'inégalité de Markov, appliquée à la variable aléatoire positive $(X_n-\ln(n))^2$, on a :

$$\mathrm{P}\left(|X_n-\ln(n)|>\varepsilon\ln(n)\right)=\mathrm{P}\left((X_n-\ln(n))^2>\varepsilon^2\ln(n)^2\right)\leqslant\frac{\mathrm{E}\left((X_n-\ln(n))^2\right)}{\varepsilon^2(\ln(n))^2}.$$

Or par la question précédente on a :

$$\mathrm{E}\left((X_n - \ln(n))^2\right) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(\omega(\sigma)-\ln(n))^2 = \ln(n) + c + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n),$$

donc $\left(\dfrac{\mathrm{E}\left((X_n-\ln(n))^2\right)}{\ln(n)}\right)_{n\geqslant 2}$ est bornée. Soit $C>0$ un majorant. Pour tout entier $n\geqslant 2$, on a donc :

$$\mathrm{P}\left(|X_n - \ln(n)| > \varepsilon \ln(n)\right) \leqslant \frac{C\ln(n)}{\varepsilon^2(\ln(n))^2} = \frac{C}{\varepsilon^2\ln(n)}.$$

d'où le résultat.

Deuxième partie

Notation. Pour alléger les notations, dans toute cette partie on notera $\mathbb{P}_x$ l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à x (et ce pour tout réel x).

16. On effectue implicitement une transformation d'Abel. Posons $A(x)=0$ pour tout $x<2$. Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} a_k b(k) = \sum_{k=2}^{n}(A(k)-A(k-1))b(k) &= \sum_{k=2}^{n}A(k)b(k) - \sum_{k=2}^{n}A(k-1)b(k)\\ &= \sum_{k=2}^{n}A(k)b(k) - \sum_{k=1}^{n-1}A(k)b(k+1)\\ &= A(n)b(n) - A(1)b(2) - \sum_{k=2}^{n-1}A(k)(b(k+1)-b(k))\\ &= A(n)b(n) - \sum_{k=2}^{n-1}A(k)(b(k+1)-b(k)).\end{aligned}$$

Or : $\forall k\in[\![2,n-1]\!]$, $b(k+1)-b(k) = \displaystyle\int_k^{k+1} b'(t)\mathrm{d}t$, et comme A est constante sur l'intervalle $[k,k+1[$ par définition de A, on a :

$$\forall k\in[\![2,n-1]\!],\quad A(k)\int_k^{k+1} b'(t)\mathrm{d}t = \int_k^{k+1} A(k)b'(t)\mathrm{d}t = \int_k^{k+1} A(t)b'(t)\mathrm{d}t.$$

On en déduit :

$$\sum_{k=2}^{n} a_k b(k) = A(n)b(n) - \sum_{k=2}^{n-1}\int_k^{k+1} A(t)b'(t)\mathrm{d}t = A(n)b(n) - \int_2^n A(t)b'(t)\mathrm{d}t,$$

d'où le résultat.

Remarque. Il s'agit de la formule sommatoire d'Abel.

17. (a) On a trivialement :

$$\prod_{p\in\mathbb{P}_1} p = 1 \leqslant 4^1,\quad \prod_{p\in\mathbb{P}_2} p = 2\leqslant 4^2,\quad \prod_{p\in\mathbb{P}_3} p = 6 \leqslant 4^3.$$

(b) Si n est pair et supérieur strictement à 2 (ce qui est le cas ici puisqu'on a supposé $n\geqslant 4$), alors n n'est pas un nombre premier puisqu'il est divisible par 2 et $n\neq 2$. On a donc : $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_{n-1}$, puis par hypothèse de récurrence :

$$\prod_{p\in\mathbb{P}_n} p = \prod_{p\in\mathbb{P}_{n-1}} p \leqslant 4^{n-1} \leqslant 4^n,$$

d'où le résultat au rang n si n est pair.

(c) Soit $p \in [\![m+2, n+1]\!]$ un nombre premier. On a :

$$m!\binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)!}{(m+1)!} = \prod_{k=m+2}^{2m+1} k = p \prod_{\substack{k=m+2\\k\neq p}}^{2m+1} k.$$

On en déduit que p divise $m!\binom{2m+1}{m}$, et comme p ne divise pas $m!$ (en effet, si c'était le cas, par le lemme d'Euclide p diviserait un entier inférieur ou égal à m, ce qui est impossible puisque $p > m$), par le lemme d'Euclide p divise $\binom{2m+1}{m}$. Comme des nombres premiers distincts sont premiers entre eux, on en déduit que $\prod\limits_{p\in\mathbb{P}_n\setminus\mathbb{P}_{m+1}} p$ divise $\binom{2m+1}{m}$, ce qui répond à la première partie de la question.

De plus, par la formule du binôme de Newton :

$$2\cdot 4^m = (1+1)^{2m+1} = \sum_{k=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{k} \geqslant \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1} = 2\binom{2m+1}{m},$$

d'où : $\binom{2m+1}{m} \leqslant 4^m$. D'où le résultat.

(d) Par hypothèse de récurrence, on a : $\prod\limits_{p\in\mathbb{P}_{m+1}} p \leqslant 4^{m+1}$, donc :

$$\prod_{p\in\mathbb{P}_{n+1}} p = \prod_{p\in\mathbb{P}_{m+1}} p \cdot \prod_{p\in\mathbb{P}_{n+1}\setminus\mathbb{P}_{m+1}} p \leqslant 4^{m+1}\cdot \prod_{p\in\mathbb{P}_{n+1}\setminus\mathbb{P}_{m+1}} p,$$

et par la question précédente $\prod\limits_{p\in\mathbb{P}_{n+1}\setminus\mathbb{P}_{m+1}} p$ divise $\binom{2m+1}{m}$ également. On a donc : $\prod\limits_{p\in\mathbb{P}_{n+1}\setminus\mathbb{P}_{m+1}} p \leqslant \binom{2m+1}{m}$, et comme $\binom{2m+1}{m}$ divise 4^m il lui est inférieur, ce qui permet de conclure :

$$\prod_{p\in\mathbb{P}_{n+1}} p \leqslant 4^{m+1}\cdot 4^m = 4^{2m+1} = 4^{n+1}.$$

La question 17.(b) et celle-ci montrent que l'inégalité recherchée est héréditaire. L'initialisation ayant été traitée à la question 17.(a), par récurrence forte on a montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \prod_{p\in\mathbb{P}_n} p \leqslant 4^n.$$

18. On a : $n! = \prod\limits_{k=1}^{n} k$, donc :

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{n} v_p(k) = \sum_{\substack{k=1\\p\mid k}}^{n} v_p(k) = \sum_{k\in\mathcal{M}_n(p)} v_p(k),$$

où $\mathcal{M}_n(p)$ est l'ensemble des entiers de $[\![1,n]\!]$ qui sont multiples de p (en effet, par définition d'une valuation p-adique, on a $v_p(k) = 0$ dès que $k \in [\![1,n]\!] \setminus \mathcal{M}_n(p)$). On définit de la même manière $\mathcal{M}_n(p^\ell)$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. On a alors :

$$\mathcal{M}_n(p) = \bigsqcup_{\ell=1}^{+\infty}\left(\mathcal{M}_n\left(p^\ell\right)\setminus\mathcal{M}_n\left(p^{\ell+1}\right)\right),$$

et donc :

$$\begin{aligned} v_p(n!) = \sum_{\ell=1}^{+\infty}\sum_{k\in\mathcal{M}_n\left(p^\ell\right)\setminus\mathcal{M}_n\left(p^{\ell+1}\right)} v_p(k) &= \sum_{\ell=1}^{+\infty}\sum_{k\in\mathcal{M}_n\left(p^\ell\right)\setminus\mathcal{M}_n\left(p^{\ell+1}\right)} \ell \\ &= \sum_{\ell=1}^{+\infty}\ell\left(\mathrm{card}\left(\mathcal{M}_n\left(p^\ell\right)\right) - \mathrm{card}\left(\mathcal{M}_n\left(p^{\ell+1}\right)\right)\right).\end{aligned}$$

Calculons ces cardinaux. Soit $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Un multiple de p^ℓ est un entier de la forme mp^ℓ. On veut uniquement dénombrer ceux qui sont dans $[\![1, n]\!]$. Or :

$$1 \leqslant mp^\ell \leqslant n \Longleftrightarrow 1 \leqslant m \leqslant \frac{n}{p^\ell},$$

donc : $\mathcal{M}_n\left(p^\ell\right) = \left\{mp^\ell \mid m \in \left[\!\left[1, \left\lfloor \frac{n}{p^\ell} \right\rfloor\right]\!\right]\right\}$, puis : $\operatorname{card}\left(\mathcal{M}_n\left(p^\ell\right)\right) = \left\lfloor \frac{n}{p^\ell} \right\rfloor$ (ce calcul montre en passant que $\operatorname{card}\left(\mathcal{M}_n\left(p^\ell\right)\right) = 0$ pour tout ℓ suffisamment grand). Donc :

$$v_p(n!) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell \left(\left\lfloor \frac{n}{p^\ell} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{\ell+1}} \right\rfloor\right) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell \left\lfloor \frac{n}{p^\ell} \right\rfloor - \sum_{\ell=1}^{+\infty} (\ell-1) \left\lfloor \frac{n}{p^\ell} \right\rfloor = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^\ell} \right\rfloor,$$

d'où la première égalité demandée. Or : $\frac{n}{p} - 1 < \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \leqslant \frac{n}{p}$, donc :

$$\frac{n}{p} - 1 + \sum_{\ell=2}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^\ell} \right\rfloor < v_p(n!) \leqslant \frac{n}{p} + \sum_{\ell=2}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^\ell} \right\rfloor.$$

Or on a trivialement : $\sum_{\ell=2}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^\ell} \right\rfloor \geqslant 0$, et :

$$\sum_{\ell=2}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^\ell} \right\rfloor \leqslant \sum_{\ell=2}^{+\infty} \frac{n}{p^\ell} = n \frac{1}{p^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{n}{p(p-1)},$$

d'où le résultat :

$$\frac{n}{p} - 1 < v_p(n!) \leqslant \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}.$$

19. (a) L'application $x \mapsto \ln(x)$ est continue et croissante sur $[1, +\infty[$, donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \ln(k) \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \ln(t) \mathrm{d}t = \int_1^{n+1} \ln(t) \mathrm{d}t.$$

De même : $\sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln(k) \mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln(t) \mathrm{d}t = \int_1^{n} \ln(t) \mathrm{d}t$, donc :

$$\int_1^{n} \ln(t) \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leqslant \int_1^{n+1} \ln(t) \mathrm{d}t.$$

Or une banale intégration par parties, où l'on dérive le logarithme népérien et intègre la fonction constante égale à 1, donne :

$$\int_1^{n} \ln(t) \mathrm{d}t = n \ln(n) - n + 1 = n \ln(n) - n + \underset{n \to +\infty}{O}(\ln(n)),$$

donc :

$$\begin{aligned}\int_1^{n+1} \ln(t) \mathrm{d}t = (n+1) \ln(n+1) - n &= n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) - n \\ &= n \ln(n) - n + \underset{n \to +\infty}{O}(\ln(n)),\end{aligned}$$

donc l'encadrement ci-dessus permet aisément de déduire comme attendu :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) = n \ln(n) - n + \underset{n \to +\infty}{O}(\ln(n)).$$

Remarque. Un usage fin de la formule de Stirling permettait aussi d'obtenir ce développement asymptotique.

(b) Par le lemme d'Euclide, les diviseurs premiers de $n! = \prod_{i=1}^{n} i$ sont nécessairement des diviseurs d'un entier inférieur ou égal à n : ce sont donc des nombres premiers inférieurs ou égaux à n. Cela suffit à justifier la première égalité de l'énoncé. On en déduit :

$$\ln(n!) = \ln\left(\prod_{p\in\mathbb{P}_n} p^{v_p(n!)}\right) = \sum_{p\in\mathbb{P}_n} v_p(n!)\ln(p).$$

L'encadrement de la question 18 donne alors :

$$n\sum_{p\in\mathbb{P}_n}\frac{\ln(p)}{p} - \sum_{p\in\mathbb{P}_n}\ln(p) < \ln(n!) \leqslant n\left(\sum_{p\in\mathbb{P}_n}\frac{\ln(p)}{p} + \sum_{p\in\mathbb{P}_n}\frac{\ln(p)}{p(p-1)}\right).$$

Par la question 17, on a : $\sum_{p\in\mathbb{P}_n}\ln(p) = \ln\left(\prod_{p\in\mathbb{P}_n} p\right) \leqslant \ln(4^n) = n\ln(4)$, d'où le résultat :

$$n\left(\sum_{p\in\mathbb{P}_n}\frac{\ln(p)}{p} - \ln(4)\right) < \ln(n!) \leqslant n\left(\sum_{p\in\mathbb{P}_n}\frac{\ln(p)}{p} + \sum_{p\in\mathbb{P}_n}\frac{\ln(p)}{p(p-1)}\right).$$

(c) La série $\sum_{k\geqslant 2}\frac{\ln(k)}{k(k-1)}$ est à termes positifs et on a par le théorème des croissances comparées : $\frac{\ln(k)}{k(k-1)} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)$. Or la série de Riemann $\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^{3/2}}$ converge parce que son exposant est strictement supérieur à 1, donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs on a la convergence voulue.

(d) La question 19.(b) permet d'obtenir l'encadrement suivant de la somme de l'énoncé :

$$\frac{\ln(n!)}{n} - \sum_{p\in\mathbb{P}_n}\frac{\ln(p)}{p(p-1)} \leqslant \sum_{p\in\mathbb{P}_n}\frac{\ln(p)}{p} \leqslant \frac{\ln(n!)}{n} + \ln(4). \tag{2}$$

On le voit : le nerf de la guerre est d'encadrer $\ln(n!)$. La propriété de morphisme du logarithme et la question 19.(a) le permettent :

$$\ln(n!) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} k\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln(k) = n\ln(n) - n + \underset{n\to+\infty}{O}(\ln(n)),$$

et de plus :

$$\sum_{p\in\mathbb{P}_n}\frac{\ln(p)}{p(p-1)} \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\ln(k)}{k(k-1)} < +\infty,$$

donc :

$$\frac{\ln(n!)}{n} - \sum_{p\in\mathbb{P}_n}\frac{\ln(p)}{p(p-1)} = \ln(n) - 1 + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) = \ln(n) + \underset{n\to+\infty}{O}(1).$$

De même : $\frac{\ln(n!)}{n} + \ln(4) = \ln(n) + \underset{n\to+\infty}{O}(1)$, ce qui permet de conclure grâce à l'encadrement (2) :

$$\sum_{p\in\mathbb{P}_n}\frac{\ln(p)}{p} = \ln(n) + \underset{n\to+\infty}{O}(1).$$

20. (a) Nous allons utiliser la question 16 pour exprimer $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{P}_x}\frac{1}{p}$ en fonction de $F(x)=\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{P}_x}\frac{\ln(p)}{p}$. Soit $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On a :

$$\sum_{p\in\mathbb{P}_n}\frac{1}{p}=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\ln(k)}\cdot\mathbb{1}_{\mathbb{P}}(k)\frac{\ln(k)}{k}.$$

Par conséquent, si l'on utilise la formule sommatoire d'Abel avec b l'application $x\mapsto\dfrac{1}{\ln(x)}$ et $(a_k)_{k\geqslant 2}=\left(\mathbb{1}_{\mathbb{P}}(k)\dfrac{\ln(k)}{k}\right)_{k\geqslant 2}$, on a : $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}a_k=F(n)$, et donc :

$$\begin{aligned}\sum_{p\in\mathbb{P}_n}\frac{1}{p}&=\frac{F(n)}{\ln(n)}+\int_2^n\frac{F(t)}{t(\ln(t))^2}\mathrm{d}t\\&=\frac{F(n)}{\ln(n)}+\int_2^n\frac{F(t)-\ln(t)}{t(\ln(t))^2}\mathrm{d}t+\int_2^n\frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}\\&=\frac{R(n)}{\ln(n)}+1+\int_2^n\frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}\mathrm{d}t+\ln(\ln(n))-\ln(\ln(2)),\end{aligned}$$

d'où le résultat quitte à réarranger les termes.

(b) On conserve la notation $F(x)$ de la question précédente. Notons que l'estimation de la question 19.(d) reste valable si l'on remplace l'entier n par un réel x. En effet :

$$F(x)=F(\lfloor x\rfloor)=\ln(\lfloor x\rfloor)+\underset{x\to+\infty}{O}(1)=\ln(x)+\ln\left(\frac{\lfloor x\rfloor}{x}\right)+\underset{x\to+\infty}{O}(1)=\ln(x)+\underset{x\to+\infty}{O}(1)$$

car $\frac{\lfloor x\rfloor}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1$. On en déduit que l'application $t\mapsto\dfrac{R(t)}{t(\ln(t))^2}$ est continue par morceaux sur $[2,+\infty[$ et vérifie :

$$\frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}=\underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t(\ln(t))^2}\right),$$

et l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(\ln(t))^2}$ converge puisqu'une primitive de $t\mapsto\dfrac{1}{t(\ln(t))^2}$, à savoir l'application $t\mapsto-\dfrac{1}{\ln(t)}$, admet une limite en l'infini. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}\mathrm{d}t$ converge absolument donc converge, d'où le résultat.

(c) Les deux questions précédentes permettent d'écrire :

$$\sum_{p\in\mathbb{P}_n}\frac{1}{p}=\ln_2(n)+1-\ln_2(2)+\int_2^{+\infty}\frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}\mathrm{d}t+\frac{R(n)}{\ln(n)}-\int_n^{+\infty}\frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}\mathrm{d}t.$$

Par la question 19.(d), on a : $\dfrac{R(n)}{\ln(n)}=\underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right)$. De plus, par la comparaison de la question précédente et le théorème d'intégration des relations de comparaison (qui s'applique puisque $t\mapsto\dfrac{1}{t(\ln(t))^2}$ est intégrable et de signe constant sur $[2,+\infty[$), on a :

$$\int_n^{+\infty}\frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}\mathrm{d}t=\underset{n\to+\infty}{O}\left(\int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(\ln(t))^2}\right)=\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{\ln(n)}\right).$$

Ainsi l'égalité ci-dessus implique :

$$\sum_{p\in\mathbb{P}_n}\frac{1}{p}=\ln_2(n)+1-\ln_2(2)+\int_2^{+\infty}\frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}\mathrm{d}t+\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{\ln(n)}\right),$$

d'où le résultat en posant : $c_1=1-\ln_2(2)+\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}\mathrm{d}t$.

21. (a) On a, en raisonnant comme au début de la question 18 (calcul du cardinal de $\mathcal{M}_n\left(p^\ell\right)$) :

$$\{n\in\mathbb{N}\cap[1,x]\mid n\equiv 0 \bmod q\}=\left\{mq\mid m\in\mathbb{N},\ \frac{1}{q}\leqslant m\leqslant\frac{x}{q}\right\}=\left\{mq\mid m\in\mathbb{N},\ 1\leqslant m\leqslant\frac{x}{q}\right\},$$

donc :

$$\operatorname{card}\left(\{n\in\mathbb{N}\cap[1,x]\mid n\equiv 0 \bmod q\}\right)-\frac{x}{q}=\left\lfloor\frac{x}{q}\right\rfloor-\frac{x}{q}.$$

Ce réel est borné en valeur absolue par 1 : d'où le résultat.

(b) Soit x au voisinage de l'infini. On a pour tout entier naturel non nul n :

$$\omega(n)=\sum_{d\mid n}\mathbb{1}_{\mathbb{P}}(d)=\sum_{\substack{(d,d')\in[\![1,n]\!]^2\\ dd'=n}}\mathbb{1}_{\mathbb{P}}(d'),$$

donc :

$$\sum_{n\leqslant x}\omega(n)=\sum_{n\leqslant x}\sum_{\substack{(d,d')\in[\![1,n]\!]^2\\ dd'=n}}\mathbb{1}_{\mathbb{P}}(d').$$

Or il y a une bijection évidente entre :

$$\left\{(n,d,d')\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^3\mid 1\leqslant n\leqslant x,\ dd'=n\right\},$$

et :

$$\left\{(d,d')\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^2\mid 1\leqslant d'\leqslant x,\ 1\leqslant d\leqslant\frac{x}{d'}\right\},$$

donnée par : $(n,d,d')\mapsto(d,d')$, et de réciproque : $(d,d')\mapsto(dd',d,d')$. On en déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)=\sum_{1\leqslant d'\leqslant x}\sum_{1\leqslant d\leqslant\frac{x}{d'}}\mathbb{1}_{\mathbb{P}}(d')&=\sum_{1\leqslant d'\leqslant x}\mathbb{1}_{\mathbb{P}}(d')\left\lfloor\frac{x}{d'}\right\rfloor\\ &=\sum_{1\leqslant d'\leqslant x}\mathbb{1}_{\mathbb{P}}(d')\frac{x}{d'}+\sum_{1\leqslant d'\leqslant x}\mathbb{1}_{\mathbb{P}}(d')\left(\left\lfloor\frac{x}{d'}\right\rfloor-\frac{x}{d'}\right).\end{aligned}$$

Or : $\forall u\in\mathbb{R},\ -1\leqslant\mathbb{1}_{\mathbb{P}}(d')\left(\left\lfloor\frac{x}{d'}\right\rfloor-\frac{x}{d'}\right)\leqslant 0$. On en déduit aisément :

$$\sum_{n\leqslant x}\omega(n)=\sum_{1\leqslant d'\leqslant x}\mathbb{1}_{\mathbb{P}}(d')\frac{x}{d'}+\underset{x\to+\infty}{O}(x).$$

Ensuite :

$$\sum_{1\leqslant d'\leqslant x}\mathbb{1}_{\mathbb{P}}(d')\frac{x}{d'}=x\sum_{p\in\mathbb{P}_x}\frac{1}{p},$$

et par une approche analogue à celle de la question 20.(b) (mais plus laborieuse : je vous l'épargne), on montre que l'estimation de la question 20.(c) reste valable en remplaçant n par un paramètre réel x. D'où :

$$\sum_{1\leqslant d'\leqslant x}\mathbb{1}_{\mathbb{P}}(d')\frac{x}{d'}=x\ln_2(x)+c_1x+\underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{x}{\ln(x)}\right).$$

En conclusion :

$$\sum_{n\leqslant x}\omega(n) = x\ln_2(x) + c_1 x + \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{x}{\ln(x)}\right) + \underset{x\to+\infty}{O}(x) = x\left(\ln_2(x) + \underset{x\to+\infty}{O}(1)\right),$$

d'où le résultat après division par x.

Remarque. Le concepteur du sujet devait avoir autre chose en tête, sans doute une interversion analogue à l'identité de la question 22.(b), qui ramène une somme parcourant des diviseurs à une somme parcourant des multiples, au vu de la question précédente (même si, au fond, je passe encore par un encadrement de $\left\lfloor\frac{x}{q}\right\rfloor - \frac{x}{q}$, comme dans ladite question).

Remarque. Les férus d'arithmétique auront reconnu la moyenne d'un produit de convolution et un cas particulier de la formule de l'hyperbole de Dirichlet.

22. (a) On développe le carré. Un calcul sans mystère donne :

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}(\omega(n)-\ln_2(x))^2 = \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2 - \frac{2\ln_2(x)}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n) + \frac{(\ln_2(x))^2}{x}\lfloor x\rfloor.$$

Or : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $0\leqslant 1-\frac{\lfloor x\rfloor}{x} < \frac{1}{x}$, et on a facilement la relation suivante par croissances comparées : $\dfrac{(\ln_2(x))^2}{x} = \underset{x\to+\infty}{O}(\ln_2(x))$, donc :

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}(\omega(n)-\ln_2(x))^2 = \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2 - \frac{2\ln_2(x)}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n) + (\ln_2(x))^2 + \underset{x\to+\infty}{O}(\ln_2(x)).$$

Grâce à la question précédente on est en mesure de conclure :

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}(\omega(n)-\ln_2(x))^2 = \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2 - (\ln_2(x))^2 + \underset{x\to+\infty}{O}(\ln_2(x)).$$

(b) Pour tout entier naturel non nul n on a :

$$\omega(n)^2 = \left(\sum_{d\mid n}\mathbb{1}_{\mathbb{P}}(d)\right)^2 = \sum_{d\mid n}\sum_{d'\mid n}\mathbb{1}_{\mathbb{P}}(d)\mathbb{1}_{\mathbb{P}}(d'),$$

donc :

$$\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2 = \sum_{n\leqslant x}\sum_{d\mid n}\sum_{d'\mid n}\mathbb{1}_{\mathbb{P}}(d)\mathbb{1}_{\mathbb{P}}(d').$$

Or il y a une bijection évidente entre :

$$\left\{(n,d,d')\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^3 \mid 1\leqslant n\leqslant x,\ d\mid n,\ d'\mid n\right\},$$

et :

$$\left\{(d,d',n)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^2 \mid 1\leqslant d\leqslant x,\ 1\leqslant d'\leqslant x,\ 1\leqslant n\leqslant x,\ d\mid n,\ d'\mid n\right\},$$

de sorte que :

$$\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2 = \sum_{d\leqslant x}\sum_{d'\leqslant x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ d\mid n\\ d'\mid n}}\mathbb{1}_{\mathbb{P}}(d)\mathbb{1}_{\mathbb{P}}(d') = \sum_{d\in\mathbb{P}_x}\sum_{d'\in\mathbb{P}_x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ d\mid n\\ d'\mid n}}1,$$

d'où le résultat, quitte à renommer les indices :

$$\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2 = \sum_{p_1\in\mathbb{P}_x}\sum_{p_2\in\mathbb{P}_x}\operatorname{card}\{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\} \mid n\leqslant x,\ p_1\mid n \text{ et } p_2\mid n\}.$$

(c) Soit x au voisinage de l'infini. Remarquons que si p_1 et p_2 sont deux nombres premiers distincts et n un entier naturel non nul, alors p_1 et p_2 divisent n si et seulement si p_1p_2 divise n. Donc, si p_1 et p_2 sont des nombres premiers distincts :

$$\operatorname{card}\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid n \leqslant x,\ p_1|n \text{ et } p_2|n\} = \operatorname{card}\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid n \leqslant x,\ p_1p_2|n\} = \left\lfloor \frac{x}{p_1p_2} \right\rfloor,$$

ce cardinal se calculant de manière analogue à celui de la question 21.(a). Donc :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p_1,p_2\in\mathbb{P}_x\\ p_1\neq p_2}} \operatorname{card}\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid n \leqslant x,\ p_1|n \text{ et } p_2|n\} &= \sum_{\substack{p_1,p_2\in\mathbb{P}_x\\ p_1\neq p_2}} \left\lfloor \frac{x}{p_1p_2} \right\rfloor \\ &= \sum_{p_1,p_2\in\mathbb{P}_x} \left\lfloor \frac{x}{p_1p_2} \right\rfloor - \sum_{p_1\in\mathbb{P}_x} \left\lfloor \frac{x}{p_1^2} \right\rfloor.\end{aligned}$$

La seconde somme est facile à estimer, puisque :

$$0 \leqslant \sum_{p_1\in\mathbb{P}_x} \left\lfloor \frac{x}{p_1^2} \right\rfloor \leqslant \sum_{p_1\in\mathbb{P}_x} \frac{x}{p_1^2} \leqslant x\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2},$$

avec : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$, donc : $\displaystyle\sum_{p_1\in\mathbb{P}_x} \left\lfloor \frac{x}{p_1^2} \right\rfloor = \underset{x\to+\infty}{O}(x)$. Donc :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p_1,p_2\in\mathbb{P}_x\\ p_1\neq p_2}} \operatorname{card}\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid n \leqslant x,\ p_1|n \text{ et } p_2|n\} &= \sum_{p_1,p_2\in\mathbb{P}_x} \left\lfloor \frac{x}{p_1p_2} \right\rfloor + \underset{x\to+\infty}{O}(x) \\ &= \sum_{\substack{p_1,p_2\in\mathbb{P}_x\\ p_1p_2\leqslant x}} \left\lfloor \frac{x}{p_1p_2} \right\rfloor + \underset{x\to+\infty}{O}(x),\end{aligned}$$

la partie entière ci-dessus étant nulle pour $p_1p_2 > x$.
Toujours grâce à l'égalité $\lfloor u \rfloor = u + \underset{x\to+\infty}{O}(1)$ valable pour tout $u \in \mathbb{R}$, on en déduit :

$$\sum_{\substack{p_1,p_2\in\mathbb{P}_x\\ p_1\neq p_2}} \operatorname{card}\{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \mid n \leqslant x,\ p_1|n \text{ et } p_2|n\} = x \sum_{\substack{p_1,p_2\in\mathbb{P}_x\\ p_1p_2\leqslant x}} \frac{1}{p_1p_2} + \underset{x\to+\infty}{O}\left(\sum_{\substack{p_1,p_2\in\mathbb{P}_x\\ p_1p_2\leqslant x}} 1 \right) + \underset{x\to+\infty}{O}(x).$$

Estimons les deux premiers termes du membre de droite. Tout d'abord, remarquons que si p_1 et p_2 sont deux nombres premiers inférieurs à $\sqrt{x}$, alors $p_1p_2 \leqslant x$, ce qui permet d'écrire l'encadrement :

$$\sum_{p_1,p_2\in\mathbb{P}_{\sqrt{x}}} \frac{1}{p_1p_2} \leqslant \sum_{\substack{p_1,p_2\in\mathbb{P}_x\\ p_1p_2\leqslant x}} \leqslant \sum_{p_1,p_2\in\mathbb{P}_x} \frac{1}{p_1p_2}.$$

Par la question 20.(c), on a :

$$\sum_{p_1,p_2\in\mathbb{P}_x} \frac{1}{p_1p_2} = \left(\sum_{p\in\mathbb{P}_x} \frac{1}{p} \right)^2 = \left(\ln_2(x) + \underset{x\to+\infty}{O}(1) \right)^2 = (\ln_2(x))^2 + \underset{x\to+\infty}{O}(\ln_2(x)),$$

et de même pour la somme de la minoration. Or :

$$\ln_2(x) - \ln_2(\sqrt{x}) = \ln\left(\frac{\ln(x)}{\frac{1}{2}\ln(x)} \right) = \ln(2),$$

donc : $\ln_2(\sqrt{x}) = \ln_2(x) + \underset{x\to+\infty}{O}(1)$, ce qui donne l'estimation :

$$\sum_{\substack{p_1,p_2\in\mathbb{P}_x \\ p_1p_2\leqslant x}} \frac{1}{p_1p_2} = (\ln_2(x))^2 + \underset{x\to+\infty}{O}(\ln_2(x)). \tag{3}$$

Il reste à estimer $\displaystyle\sum_{\substack{p_1,p_2\in\mathbb{P}_x \\ p_1p_2\leqslant x}} 1$. On a :

$$0 \leqslant \sum_{\substack{p_1,p_2\in\mathbb{P}_x \\ p_1p_2\leqslant x}} 1 = \sum_{p_1\in\mathbb{P}_x}\sum_{p_2\in\mathbb{P}_{x/p_1}} 1 \leqslant \sum_{p_1\in\mathbb{P}_x} \frac{x}{p_1},$$

et donc l'estimation de la question 20.(c), à nouveau, donne :

$$\sum_{\substack{p_1,p_2\in\mathbb{P}_x \\ p_1p_2\leqslant x}} 1 = \underset{x\to+\infty}{O}(x\ln_2(x)). \tag{4}$$

En combinant (3) et (4), on obtient enfin le résultat voulu :

$$\sum_{\substack{p_1,p_2\in\mathbb{P}_x \\ p_1\neq p_2}} \mathrm{card}\{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\} \mid n\leqslant x,\ p_1|n \text{ et } p_2|n\} = x(\ln_2(x))^2 + \underset{x\to+\infty}{O}(x\ln_2(x)).$$

(d) Soit x au voisinage de l'infini. On a par la question 22.(b) :

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2 \\
&= \sum_{\substack{p_1,p_2\in\mathbb{P}_x \\ p_1\neq p_2}} \mathrm{card}\{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\} \mid n\leqslant x,\ p_1|n \text{ et } p_2|n\} - \sum_{p\in\mathbb{P}_x}\mathrm{card}\{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\} \mid n\leqslant x,\ p \mid n\} \\
&= \sum_{\substack{p_1,p_2\in\mathbb{P}_x \\ p_1\neq p_2}} \mathrm{card}\{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\} \mid n\leqslant x,\ p_1|n \text{ et } p_2|n\} - \sum_{p\in\mathbb{P}_x}\left\lfloor\frac{x}{p}\right\rfloor \\
&= \sum_{\substack{p_1,p_2\in\mathbb{P}_x \\ p_1\neq p_2}} \mathrm{card}\{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\} \mid n\leqslant x,\ p_1|n \text{ et } p_2|n\} - x\sum_{p\in\mathbb{P}_x}\frac{1}{p} + \underset{x\to+\infty}{O}(x) \\
&= \sum_{\substack{p_1,p_2\in\mathbb{P}_x \\ p_1\neq p_2}} \mathrm{card}\{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\} \mid n\leqslant x,\ p_1|n \text{ et } p_2|n\} - x\ln_2(x) + \underset{x\to+\infty}{O}(x)
\end{aligned}$$

grâce à l'estimation de la question 20.(c) (dont nous avons déjà affirmé qu'elle reste valable en remplaçant n par un réel x). La question précédente permet d'estimer la première somme et d'obtenir :

$$\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2 = x\ln_2(x)^2 - x\ln_2(x) + \underset{x\to+\infty}{O}(x\ln_2(x)),$$

et la question 22.(a) donne alors le résultat voulu :

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}(\omega(n)-\ln_2(x))^2 = \ln_2(x)^2 - \ln_2(x) - \ln_2(x)^2 + \underset{x\to+\infty}{O}(\ln_2(x)) = \underset{x\to+\infty}{O}(\ln_2(x)).$$

23. Soit x au voisinage de l'infini. On a :

$$\mathrm{card}(\mathscr{S}\cap[1,x]) = \mathrm{card}(\mathscr{S}\cap[1,\sqrt{x}]) + \mathrm{card}(\mathscr{S}\cap[\sqrt{x},x]),$$

et on a évidemment : $\mathrm{card}(\mathscr{S} \cap [1, \sqrt{x}]) \underset{x \to +\infty}{=} O(\sqrt{x})$ (ce cardinal est compris entre 0 et $\lfloor \sqrt{x} \rfloor \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{x}$), donc :

$$\mathrm{card}(\mathscr{S} \cap [1, x]) = \mathrm{card}(\mathscr{S} \cap [\sqrt{x}, x]) + \underset{x \to +\infty}{O}(\sqrt{x}).$$

Estimons le cardinal du membre de droite. En interprétant improprement ce cardinal comme une variable aléatoire et en singeant la démonstration de l'inégalité de Markov, je vais obtenir le résultat voulu en raisonnant comme dans la question 15 (mais avec des complications techniques supplémentaires). On a :

$$\mathrm{card}(\mathscr{S} \cap [\sqrt{x}, x]) = \sum_{\sqrt{x} \leqslant n \leqslant x} \mathbb{1}_{\mathscr{S}}(n),$$

et pour tout entier naturel non nul n on a :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\omega(n) - \ln_2(n)}{\sqrt{\ln_2(n)}}\right)^2 &= \left(\frac{\omega(n) - \ln_2(n)}{\sqrt{\ln_2(n)}}\right)^2 \mathbb{1}_{\mathscr{S}}(n) + \left(\frac{\omega(n) - \ln_2(n)}{\sqrt{\ln_2(n)}}\right)^2 \mathbb{1}_{\mathbb{N}\setminus\mathscr{S}}(n) \\
&\geqslant \left(\frac{\omega(n) - \ln_2(n)}{\sqrt{\ln_2(n)}}\right)^2 \mathbb{1}_{\mathscr{S}}(n) \\
&\geqslant \sqrt{\ln_2(n)}\mathbb{1}_{\mathscr{S}}(n),
\end{aligned}$$

donc :

$$\mathrm{card}(\mathscr{S} \cap [\sqrt{x}, x]) \leqslant \sum_{\sqrt{x} \leqslant n \leqslant x} \frac{1}{\sqrt{\ln_2(n)}} \left(\frac{\omega(n) - \ln_2(n)}{\sqrt{\ln_2(n)}}\right)^2 \leqslant \frac{1}{(\ln_2(\sqrt{x}))^{3/2}} \sum_{\sqrt{x} \leqslant n \leqslant x} (\omega(n) - \ln_2(n))^2.$$

L'objectif est à présent d'utiliser l'estimation de la question précédente : cela nécessite de faire apparaître $\omega(n) - \ln_2(x)$. Faisons. Pour tout entier naturel strictement supérieur à 1, on a :

$$\begin{aligned}
(\omega(n) - \ln_2(n))^2 &= ((\omega(n) - \ln_2(x)) + (\ln_2(x) - \ln_2(n)))^2 \\
&\leqslant 2\left(\omega(n) - \ln_2(x)\right)^2 + 2\left(\ln_2(x) - \ln_2(n)\right)^2.
\end{aligned}$$

Majorons la somme indexée par chacun de ces termes. On a par la question précédente :

$$\sum_{\sqrt{x} \leqslant n \leqslant x} (\omega(n) - \ln_2(x))^2 = \underset{x \to +\infty}{O}\left(\sum_{n \leqslant x} (\omega(n) - \ln_2(x))^2\right) = \underset{x \to +\infty}{O}(x \ln_2(x)),$$

puis :

$$0 \leqslant \sum_{\sqrt{x} \leqslant n \leqslant x} (\ln_2(x) - \ln_2(n))^2 \leqslant \left(\ln_2(x) - \ln_2(\sqrt{x})\right)^2 \sum_{\sqrt{x} \leqslant n \leqslant x} 1 \leqslant x\left(\ln_2(x) - \ln_2(\sqrt{x})\right)^2,$$

or : $\ln_2(x) - \ln_2(\sqrt{x}) = \ln\left(\frac{\ln(x)}{\ln(\sqrt{x})}\right) = \ln(2)$, donc : $\displaystyle\sum_{\sqrt{x} \leqslant n \leqslant x} (\ln_2(x) - \ln_2(n))^2 \underset{x \to +\infty}{=} O(x)$. On en déduit :

$$\mathrm{card}(\mathscr{S} \cap [\sqrt{x}, x]) = \underset{x \to +\infty}{O}\left(\frac{x \ln_2(x)}{(\ln_2(\sqrt{x}))^{3/2}}\right).$$

Un calcul technique sans mystère permet de montrer : $(\ln_2(\sqrt{x}))^{3/2} \underset{x \to +\infty}{\sim} (\ln_2(x))^{3/2}$. Finalement :

$$\mathrm{card}(\mathscr{S} \cap [\sqrt{x}, x]) = \underset{x \to +\infty}{O}\left(\frac{x}{\sqrt{\ln_2(x)}}\right).$$

Si l'on récapitule tout ce qui précède, on a donc montré :

$$\frac{1}{x}\,\mathrm{card}(\mathscr{S}\cap[1,x]) = \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\ln_2(x)}}\right) + \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right),$$

d'où le résultat :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{card}(\mathscr{S}\cap[1,x]) = 0.$$