MPSI1 – Programme de colles
Semaine 11 – du 8 au 12 décembre 2025

Fonctions d'une variable réelle : limites et continuité

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et, sauf dans les paragraphes A-d) et B-e), sont à valeurs réelles. On dit qu'une propriété portant sur une fonction f définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert centré en a si a est réel, avec un intervalle $]A, +\infty[$ si $a = +\infty$, avec un intervalle $]-\infty, A[$ si $a = -\infty$.

A - Limites et continuité

Le paragraphe a) consiste largement en des adaptations au cas continu de notions déjà étudiées pour les suites. Afin d'éviter des répétitions, le professeur a la liberté d'admettre certains résultats.

Pour la pratique du calcul de limites, on se borne à ce stade à des calculs très simples, en attendant de disposer d'outils efficaces (développements limités).

Contenus	Capacités & commentaires
a) Limite d'une fonction en un point	
Étant donné un point a de $\overline{\mathbb{R}}$ appartenant à I ou extrémité de I, limite finie ou infinie d'une fonction en a.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
Unicité de la limite.	Notations $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.
Si f est définie en a et possède une limite en a, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.	
Si f possède une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.	
Limite à droite, limite à gauche.	Notations $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.
Caractérisation séquentielle de la limite (finie ou infinie). Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient, composition. Passage à la limite d'une inégalité large. Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$),par majoration (limite $-\infty$). Théorème de la limite monotone.	
b) Continuité en un point	
Continuité, prolongement par continuité en un point.	La continuité de f au point a de I est définie par la relation $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$.
Continuité à gauche, à droite. Caractérisation séquentielle de la continuité en un point. Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.	
c) Continuité sur un intervalle	
Continuité sur un intervalle.	
Théorème des valeurs intermédiaires.	Principe de démonstration par dichotomie.
Image d'un intervalle par une fonction continue. Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone. Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Image d'un segment par une fonction continue.	
Une fonction continue sur un intervalle, à valeurs réelles et injective, est strictement monotone.	La démonstration n'est pas exigible.
Toute fonction réelle strictement monotone, définie et continue sur un intervalle, admet une fonction réciproque de même monotonie, définie et continue sur un intervalle.	La démonstration n'est pas exigible.
d) Fonctions complexes	
Brève extension des définitions et résultats généraux sur les limites et la continuité.	Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide des parties réelle et imaginaire.

Au programme :

— cours sur les limites de fonctions et la continuité

— exercices sur les limites de fonctions et la continuité (on est au début, relativement peu d'exercices ont été faits). Révisions possibles d'arithmétique.

Exemples de questions de cours

1. Composition limite de suite/limite de fonctions.
2. Caractérisation séquentielle de la limite.
   NB : les opérations sur les limites de fonctions et théorèmes de majoration/minoration/encadrement n'ont pas été re-démontrées (mais vues comme conséquences de la caractérisation séquentielle).
3. Théorème de la limite monotone (notamment en un point intérieur à l'intervalle).
4. Théorème des valeurs intermédiaires, par dichotomie.
5. Théorème des valeurs intermédiaires, par borne supérieure.
6. Lien entre injectivité et monotonie.
7. La bijection réciproque d'une fonction continue est continue, de même variation.
8. Théorème des bornes atteintes.