 nlaillet.math@gmail.com

TD 09
Limites de fonctions – continuité

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. ●○○ Déterminer la limite des quantités suivantes au point indiqué.

1. $\dfrac{x}{\lfloor x \rfloor}$ en $+\infty$.
2. $\dfrac{\sin(x)}{\text{sh}(x)}$ en 0 et en $+\infty$
3. $(x^x)^x$ et $x^{(x^x)}$ en 0
4. $x^a \ln(1+\sin(x^2))$ en 0 (en fonction de la valeur de $a \in \mathbb{R}$)
5. $\dfrac{e^x - e^2}{\ln(x) - \ln(2)}$ en 2.
6. $\dfrac{\sin(x)^x - 1}{\cos(\sqrt{x}) - 1}$ en 0.
7. $\left(\dfrac{a+x}{x}\right)^x$ en 0 et en $+\infty$, où a est un réel strictement positif.

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues en 0 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(2x).$$

Exercice 3. Soit $f : x \mapsto \dfrac{x\ln(x)}{x-1}$. Donner l'ensemble de définition de f et étudier son (ses) éventuel(s) prolongement(s) par continuité possible(s).

Correction

$x \mapsto \dfrac{x\ln(x)}{x-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$ par les théorèmes généraux.
En 0, on a $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ln(x)}{x-1} = 0$, donc la fonction est prolongeable par continuité en 0.
En 1, on écrit $\dfrac{x\ln(x)}{x-1} = \dfrac{(y+1)\ln(y+1)}{y}$ avec $y = x-1$. Or,

$$\lim_{y\to 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\ln(y+1) - \ln(1)}{y+1-1} = \ln'(0+1) = 1.$$

Donc $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{(y+1)\ln(y+1)}{y} = 1$. Donc la fonction est prolongeable par continuité en 1.

Exercice 4. Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$.

1. On suppose que $f([a,b]) \subset [a,b]$. Montrer que f admet un point fixe dans $[a,b]$.

Correction

Définissions la fonction g de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in [a,b],\ g(x) = f(x) - x$. Alors g est continue, $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ car $f(a) \in [a,b]$, et $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$. Donc g change de signe sur $[a,b]$, donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule sur $[a,b]$, donc il existe x_0 dans $[a,b]$ tel que $g(x_0) = 0$, i.e. $f(x_0) = x_0$.

2. On suppose maintenant que $[a, b] \subset f([a, b])$. Montrer que f admet un point fixe dans $[a, b]$.

Correction

On sait que $[a, b] \subset f([a, b])$, donc on dispose de α et β dans $[a, b]$ tels que $a = f(\alpha)$ et $b = f(\beta)$. Supposons $\alpha \leqslant \beta$ et définissons la fonction g sur $[a, b]$ comme précédemment. Alors $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = a - \alpha \leqslant 0$ car $\alpha \in [a, b]$. De même, $g(\beta) = f(\beta) - \beta = b - \beta \geqslant 0$ car $\beta \in [a, b]$. Donc g change de signe sur $[\alpha, \beta]$, donc par le TVI il existe x_0 dans $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ tel que $g(x_0) = 0$, i.e. $f(x_0) = x_0$.

2 Exercices à faire en TD

Plan de travail Ici, trois types d'exercices :

1. Des exercices uniquement sur les limites et l'asymptotique : les exercices 5 et 6.
2. Dans les premiers exercices sur la continuité (sous-section 2.2), il n'y a jamais à utiliser de ε : les plus importants sont les 9 et 10. Les exercices 11 et 12 sont du même type que 3 (à faire si l'exercice 3 a mal été compris).
3. Enfin, la dernière section, 2.3, permet d'utiliser les théorèmes généraux sur la continuité (comme l'exercice 4) : les plus importants sont les 15, 16 et 17, qui permettent de réviser les théorèmes importants de cours.

2.1 Limites

Exercice 5. ◐○○ - ●◐○ Déterminer les limites suivantes, quand elles existent. Si la limite n'existe pas, montrer pourquoi elle n'existe pas.

1. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$.
2. $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. $\lim_{x\to 1} \ln(x)\ln(\ln(x))$
4. $\lim_{x\to 0} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$
5. $\lim_{x\to+\infty} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{\sin(x)}$
7. $\lim_{x\to+\infty} \sin(\ln(x+1))-\sin(\ln(x))$

Correction

1. On multiplie par la quantité conjuguée pour écrire
$$\begin{aligned}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) &= \sqrt{x}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\\ &= \sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.\end{aligned}$$
2. Fait en cours, la fonction n'a pas de limite !
3. On sait que pour tout y, $y\ln(y) \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc, comme $\ln(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$, $\ln(x)\ln(\ln(x)) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$.
4. On sait que pour tout x dans $\mathbb{R}^*$,
$$\frac{1}{x}-1 \leqslant \left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}.$$
Si $x>0$,
$$1-x \leqslant x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \leqslant 1,$$
donc, par encadrement, $x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$. De même, si $x<0$,
$$1-x \geqslant x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \geqslant 1,$$
donc, par encadrement, $x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 1$.
Donc, comme 0 n'est pas dans l'ensemble de définition de $x\mapsto x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$, on en déduit que
$$x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1.$$
5. Soit $x>1$. Alors $\frac{1}{x}\in[0,1[$ donc $x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor=0$, donc $x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor=0$ sur un voisinage de $+\infty$ donc $x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

6. On sait que $\lim\limits_{x\to 0^-} \sin(x) = 0^-$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin(x) = 0^+$. Donc

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{\sin(x)} = -\infty \text{ et } \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{\sin(x)} = +\infty.$$

7. Pour tous réels p et q, $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$, donc

$$\begin{aligned}\sin(\ln(x+1)) - \sin(\ln(x)) &= 2\sin\left(\frac{\ln(x+1)-\ln(x)}{2}\right)\cos\left(\frac{\ln(x+1)+\ln(x)}{2}\right)\\ &= 2\sin\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\cos\left(\frac{\ln(x(x+1))}{2}\right).\end{aligned}$$

Or, $\cos\left(\frac{\ln(x(x+1))}{2}\right)$ est borné et $\sin\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\sin(\ln(x+1)) - \sin(\ln(x)) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 6. ●○○ Déterminer les limites suivantes à l'aides de relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{xe^{-x}+x^2}{x-\ln x}$

Correction

$$\frac{xe^{-x}+x^2}{x-\ln x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^2}{x} = x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\ln x - x}{x+\cos x}$

Correction

$$\frac{x\ln x - x}{x+\cos x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x\ln(x)}{x} = \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{xe^x - x^2}}{e^x+e^{-x}}$

Correction

$$\frac{\sqrt{xe^x-x^2}}{e^x+e^{-x}} \sim \frac{\sqrt{xe^x}}{e^x} = \sqrt{\frac{x}{e^x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin^3(x)}{1-\sqrt{1+3x^3}}$

Correction

Attention au point en lequel on prend les

$$\frac{\sin^3(x)}{1-\sqrt{1+3x^3}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sin^3(x)}{-\sqrt{3}x^{\frac{3}{2}}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

5. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin^3(x)}{1-\sqrt{1+3x^3}}$

Correction

Ici, on peut utiliser les équivalents usuels.

$$\frac{\sin^3(x)}{1-\sqrt{1+3x^3}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{-\frac{3x^3}{2}} = -\frac{2}{3}.$$

6. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\ln(x-2)}{e^x - e^3}$

Correction

Ici, il faut faire une translation pour revenir au point en lequel on prend les équivalents.

$$\frac{\ln(x-2)}{e^x-e^3} = \frac{\ln(1+(x-3))}{e^3(e^{x-3}-1)}.$$

On pose alors $y = x-3$. On a donc, quand $x\to 3$, $y\to 0$. Donc

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+(x-3))}{e^3(e^{x-3}-1)} &= \frac{\ln(1+y)}{e^3(e^y-1)}\\ &\underset{y\to 0}{\sim} \frac{y}{e^3\times y} = e^{-3}.\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\ln(x-2)}{e^x-e^3} = e^{-3}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)-\ln(x)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)-\ln(x)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

Exercice 7. ●●○ Déterminer toutes les $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telles que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{x}{y}$.

Correction

On procède par analyse-synthèse.
Analyse. Soit f une fonction vérifiant la relation précédente. Soit y dans $\mathbb{R}$. Alors pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$, $|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{x}{y}$. En faisant tendre x vers 0 et par encadrement, on obtient que f admet une limite quand x tend vers 0, égale à $f(y)$. Ceci étant valable pour tout y de $\mathbb{R}_+^*$, on déduit, par unicité de la limite, que la fonction f est constante.

Exercice 8. ●●○ Déterminer toutes les fonctions périodiques qui possèdent une limite en $+\infty$.

Correction

Montrons qu'une fonction périodique non constante n'a pas de limite en $+\infty$.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-périodique, non constante. Alors on dispose d'un réel x tel que $f(x) \neq f(0)$.
Posons (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout n par

$$u_n = nT \text{ et } v_n = x + nT.$$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
De plus, par récurrence immédiate, on a, pour tout n entier naturel,

$$f(u_n) = f(nT) = f(0) \text{ et } f(v_n) = f(x + nT) = f(x).$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$, donc f n'a pas de limite en $+\infty$.

2.2 Continuité : définition

Exercice 9. ●○○ Étudier la continuité des applications suivantes :

1. $f : x \mapsto x + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$,

Correction

Si $a \notin \mathbb{Z}$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue en a, donc, par les théorèmes généraux, f est continue en a.
Si $a \in \mathbb{Z}$, alors $\lim\limits_{x\to a^-} \lfloor x \rfloor = a - 1$ et $\lim\limits_{x\to a^+} \lfloor x \rfloor = a$, donc

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = a + \sqrt{a - (a-1)} = a + 1$$
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = a + \sqrt{a - a} = a.$$

Donc les limites à droite et à gauche de f en a sont différentes, donc f n'est pas continue en a.
Elle est en revanche continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

2. $g : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor - (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Correction

Si $a \notin \mathbb{Z}$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue en a, donc, par les théorèmes généraux, g est continue en a.
Si $a \in \mathbb{Z}$, alors $\lim\limits_{x\to a^-} \lfloor x \rfloor = a-1$ et $\lim\limits_{x\to a^+} \lfloor x \rfloor = a$, donc

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a^-} g(x) = a-(a-1)-(1)^2 = 0,\\
&\lim_{x\to a^+} g(x) = a-a-(0)^2 = 0,\\
&g(a) = 0,
\end{aligned}$$

donc g est continue en a. Donc g est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10. ●○○ Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Montrer que $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ sont continues sur I. On pourra pour cela réutiliser l'expression de max et min à l'aide des fonctions usuelles.

Correction

L'exercice est en fait simple si on écrit que $\max(f,g) = \dfrac{|f-g|+f+g}{2}$ et $\min(f,g) = \dfrac{f+g-|f-g|}{2}$. La fonction valeur absolue est continue, donc chacune des deux fonctions est continue !

Exercice 11. ●◐○ Étudier la continuité ainsi que le possible prolongement aux bornes des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$

Correction

$x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ par les théorèmes généraux. En 0, on étudie

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \text{ donc } \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Donc la fonction est prolongeable par continuité en 0.

2. $x \mapsto (x|\ln(x)|+1)^{\ln(x)}$

Correction

Pour tout x tel que $x > 0$,

$$(x|\ln(x)|+1)^{\ln(x)} = \exp\left(\ln(x)\ln(1+x|\ln(x)|)\right).$$

La fonction est définie en $x \neq 0$, et est continue en tout point non nul par les théorèmes généraux. En 0, on sait que pour tout X, $\ln(1+X) \leqslant X$, donc

$$|\ln(x)|\ln(1+x|\ln(x)|) \leqslant x\ln(x)^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc $(x|\ln(x)|+1)^{\ln(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, donc est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 12. ●◐○ Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'application $f : x \mapsto x^\alpha \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Correction

On sait que si $\alpha > 0$, $x^\alpha \sin \frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc la fonction est prolongeable par continuité si $\alpha > 0$.
Si $\alpha \leqslant 0$, soient $u_n = \frac{1}{2\pi n}$ et $v_n = \frac{1}{\pi + 2\pi n}$. Alors ces deux suites tendent toutes deux vers 0 et

$$u_n^\alpha \sin \frac{1}{u_n} = (2\pi n)^{-\alpha} \sin(2\pi n) = 0,$$
$$v_n^\alpha \sin \frac{1}{v_n} = (\pi + 2\pi n)^{-\alpha} \sin(\pi + 2\pi n) = (\pi + 2\pi n)^{-\alpha},$$

qui ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc la fonction n'a pas de limite en 0, donc n'y est pas prolongeable par continuité.

Exercice 13. *Quelques équations fonctionnelles*. ●●○

1. Déterminer toutes les $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ f(xy) = f(x)+f(y)$.

Correction

On utilise le fait que les $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ f(xy) = f(x)+f(y)$ sont les fonctions linéaires.
Analyse. Soit f une telle fonction. Posons alors $g : x \mapsto f(e^x)$. Alors g va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et pour tous x et y dans $\mathbb{R}$,

$$g(x+y) = f(e^{x+y}) = f(e^x e^y) = f(e^x) + f(e^y) = g(x) + g(y),$$

et g est continue. Donc g est linéaire, i.e. on dispose de a tel que $g : x \mapsto ax$. Donc si $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = g(\ln(x)) = a\ln(x)$.
Réciproquement, les $x \mapsto a\ln(x)$ sont toutes solution.

2. Déterminer toutes les $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ f(xy) = f(x)f(y)$.

Correction

De même, on considère $h : x \mapsto \ln(f(x))$ alors h va de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et pour tous x et y, $h(xy) = \ln(f(xy)) = \ln(f(x)f(y)) = \ln(f(x)) + \ln(f(y)) = h(x) + h(y)$, donc, par la question précédente, on dispose de a tel que $h : x \mapsto a\ln(x)$, donc $f : x \mapsto e^{h(x)} = e^{a\ln(x)} = x^a$. La synthèse se fait de même.

Exercice 14. ●●◐ Construire une bijection de $[0,1]$ dans lui-même discontinue en tout point.

Correction

On définit la fonction f suivante

$$\forall x \in [0,1],\ \ f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1-x \text{ si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$

La fonction est bijective, car $f \circ f = \mathrm{Id}$. Elle est discontinue en tout point sauf en $\dfrac{1}{2}$. Si on pose $g = f$ sur $[0,1]\backslash\{0, 1/2\}$, avec $g(0) = \dfrac{1}{2}$ et $g(1/2) = 0$, on a la fonction désirée.

2.3 Continuité : théorèmes généraux

Exercice 15. ●○○ Soit f une fonction continue sur un intervalle telle que $|f|$ est constante. Montrer que f est constante.

Correction

Supposons que f n'est pas constante. Alors on dispose de x et y tels que $f(x) \neq f(y)$. Mais $|f|$ est constante donc $|f(x)| = |f(y)|$ donc, en particulier, $f(x) \neq 0$ et $f(y) \neq 0$. Mais alors $f(x)$ et $f(y)$ sont de signe (strict) opposé et, par continuité de f et par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe z entre x et y tel que $f(z) = 0$. Mais alors $|f(z)| = 0$, différent de $|f(x)|$ et $|f(y)|$, absurde ! Donc f est constante.

Exercice 16. ●●○ Soient f et g deux applications continues sur un segment $[a,b]$ avec $a < b$. On suppose que pour tout x de $[a,b]$, $f(x) < g(x)$.

1. Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $\forall x \in [a,b],\ \ f(x) + k < g(x)$.

Correction

Considérons l'application $h : x \mapsto g(x) - f(x)$. Alors h atteint son minimum sur $[a,b]$, en un point c. Mais alors $h(c) = g(c) - f(c) > 0$. On pose $k = \dfrac{h(c)}{2}$. Alors pour tout x dans $[a,b]$, $h(x) \geqslant h(c) > \dfrac{h(c)}{2} = k$, donc pour tout x dans $[a,b]$, $f(x) < k + g(x)$.

2. Le résultat reste-t-il vrai si on prend un intervalle ouvert ?

Correction

Non ! On prend $x \mapsto 0$ et $x \mapsto x$ sur $]0,1[$.

Exercice 17. ●●○

1. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe un réel x_0 de $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ tel que $f(x_0) = f\left(x_0 + \dfrac{1}{2}\right)$.

Correction

Posons $g : x \mapsto f(x) - f\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$. Alors $g(0) = f(0) - f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) - f(1) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) - f(0)$, donc $g(0)$ et $g(1)$ sont de signe opposé donc, d'après le théorème

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

des valeurs intermédiaires g s'annule sur $[0,1]$ donc il existe x_0 dans $[0,1]$ tel que $g(x_0) = 0$, i.e. $f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{2}\right)$.

2. Une personne fait un tour de 6 km en 40 minutes. Montrer qu'il existe une portion de chemin de 3 km qu'elle a parcourue en 20 minutes.

Correction

Soit $f : t \mapsto f(t)$ la distance parcourue par la personne. Soit $g : x \mapsto f(40x) - 6x$. Alors $g(0) = 0$, $g(1) = f(40) - 6 = 6 - 6 = 0$ donc on dispose de x_0 tel que $g(x_0) = g\left(x_0 + \frac{1}{2}\right)$, i.e.

$$f(40x_0) - 6x_0 = f\left(40x_0 + 20\right) - 6x_0 - 3,$$

i.e. $f\left(40x_0 + 20\right) - f(40x_0) = 3$, donc la personne a parcouru 3 km entre $40x_0$ et $40x_0 + 20$.

3. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, il existe x_0 dans $[0,1]$ tel que $f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right)$.

Correction

Posons $g : x \mapsto f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)$. Alors

$$\begin{aligned}
g(0) &= f(0) - f\left(\frac{1}{n}\right)\\
g\left(\frac{1}{n}\right) &= f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{2}{n}\right)\\
&\dots\\
g\left(1 - \frac{1}{n}\right) &= f\left(1 - \frac{1}{n}\right) - f\left(1\right),
\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = f(0) - f(1) = 0$ par télescopage, donc on dispose de k_0 tel que $g\left(\frac{1}{k_0}\right)$ et $g\left(\frac{1}{k_0+1}\right)$ sont de signe opposé. Donc, par le TVI, g s'annule entre $\frac{1}{k_0}$ et $\frac{1}{k_0+1}$, ce qui démontre le résultat désiré.

4. Montrer en revanche que le résultat précédent est faux si on remplace $\frac{1}{n}$ par $a \in \mathbb{R}$ quelconque.

Correction

Si a n'est pas l'inverse d'un entier, on pose $f : x \mapsto \left|\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right| - x\left|\sin\left(\frac{\pi}{a}\right)\right|$. Alors

$f(0) = 0$, $f(1) = 0$ et si $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x+a) - f(x) &= \left|\sin\left(\frac{\pi(x+a)}{a}\right)\right| - (x+a)\left|\sin\left(\frac{\pi}{a}\right)\right| - \left|\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right| + x\left|\sin\left(\frac{\pi}{a}\right)\right| \\ &= -a\left|\sin\left(\frac{\pi}{a}\right)\right| \neq 0, \end{aligned}$$

d'où f ne vérifie pas : « il existe x_0 dans $[0,1]$ tel que $f(x_0) = f(x_0 + a)$. »

Exercice 18. ●◐○ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \geqslant a|x-y|.$$

Montrer que f est bijective.

Correction

Montrons que f est injective, puis bijective.

1. f est injective. En effet, soient x et y tels que $f(x) = f(y)$. Alors $a|x-y| \leqslant 0$, i.e. $x = y$. Donc f est injective.
2. f étant continue, elle est donc strictement monotone. Supposons que f est strictement croissante. On a pour tout x réel

$$a|x| \leqslant |f(x) - f(0)| \leqslant |f(x)| + |f(0)| \text{ donc } |f(x)| \geqslant a|x| - |f(0)| \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

donc par majoration $\lim\limits_{x\to-\infty} |f(x)| = \lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty$. Comme f est strictement croissante, on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
3. On en déduit, par le théorème des vaeurs intermédiaires aux limites, que f est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Elle est donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 19. ●●○ Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue telle que $f \circ f = f$. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un segment. Décrire l'allure de f.

Correction

Soit $PF(f)$ l'ensemble des points fixes de f. Montrons que $PF(f) = f([0,1])$.

1. Soit x dans $PF(f)$. Alors $x = f(x)$, donc $x \in f([0,1])$.
2. Soit $y \in f([0,1])$, alors on dispose de $x \in [0,1]$ tel que $y = f(x)$. Mais alors $f(y) = f(f(x)) = f(x) = y$ donc $y \in PF(f)$.

Donc $PF(f) = f([0,1])$.
Mais f est continue sur $[0,1]$, donc elle atteint son minimum m et son maximum M sur $[0,1]$, donc $f([0,1]) = [m,M]$. Donc $PF(f) = [m,M]$ est un segment.

Exercice 20. ●●○ Existe-t-il une bijection continue de $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$? Une surjection ?

Correction

Une bijection continue de $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$ est strictement monotone, donc est majorée ou minorée sur $[0,1]$ donc ne peut pas être surjective dans $\mathbb{R}$.
En revanche, si on enlève l'hypothèse d'injectivité, prenons $f : x \mapsto \dfrac{\sin(1/x)}{x}$. Cette fonction est définie de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et on peut montrer qu'elle n'a pas de limite et n'est pas bornée

au voisinage de 0 : si l'on prend $u_n = \dfrac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$, alors $f(u_n) = (2\pi n + \pi/2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et si l'on prend $v_n = \dfrac{1}{2\pi n - \frac{\pi}{2}}$, $f(v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Cette fonction est donc une bijection de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Maintenant, en prenant $g : x \mapsto f(1-x)$, on obtient une bijection de $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$! !

Exercice 21. ●●○ Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. On suppose de plus qu'il existe $n \geqslant 2$ tel que

$$\forall x \in [0,1], f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}(x) = x.$$

Montrer que $\forall x \in [0,1],\ f(x) = x$. (on s'intéressera à l'injectivité et donc à la monotonie de f).

Correction

Montrons que f est injective. Soient x et y deux réels tels que $f(x) = f(y)$. Alors, si $n \geqslant 2$, $f^{n-1}(f(x)) = f^{n-1}(f(y))$, i.e. $f^n(x) = f^n(y)$, i.e. $x = y$. Donc f est injective sur $[0,1]$. Étant continue sur $[0,1]$, elle est strictement monotone (donc strictement croissante car $f(0) < f(1)$.
Soit alors $x \in [0,1]$. Supposons que $f(x) \neq x$, par exemple $f(x) < x$. Alors par croissance stricte de f, $f^2(x) < f(x)$, donc $f^2(x) < x$. On montre par une récurrence immédiate que pour tout entier k, $f^k(x) < x$. En particulier $f^n(x) < x$, i.e. $x < x$, absurde. D'où le résultat.
La preuve s'adapte si $f(x) > x$.

Exercice 22. ●●● Soit f une surjection continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que tout réel admet une infinité d'antécédents par f.

Correction

Montrons la proposition suivante :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \forall A > 0, \exists x \geqslant A,\ f(x) = y.$$

Cela assurera que chaque réel y a une suite d'antécédents tendant vers $+\infty$: il suffira de construire (x_n) avec x_0 un antécédent de y et pour tout n, x_{n+1} un antécédent de y supérieur à $x_n + 1$.
Soit alors $y \in \mathbb{R}, A > 0$. Sur $[0, A]$, f atteint son maximum M et son minimum m.

- Si $y \geqslant f(A)$, soit $z > M + 1$. Alors z admet un antécédent par f, qui n'est pas dans $[0, A]$. Donc on dispose de x dans $[A, +\infty[$ tel que $f(x) = z$. On a alors $f(A) \leqslant y \leqslant f(x)$, donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, on dispose de $x_0 \in [A, x]$ tel que $y = f(x_0)$. D'où la proposition souhaitée.
- Si $y \leqslant f(A)$ on fait de même avec $z < m - 1$.

Le résultat est donc prouvé.

Indications

2. **1.** (a) Poser $x' = \dfrac{x}{2}$.
   (b) Faire une récurrence.

(c) Utiliser la continuité de f en 0.

2. Juste bien rédiger.

4. **1.** Poser $g : x \mapsto f(x) - x$.

   2. Deux possibilités : ou bien utiliser le fait que a et b ont des antécédents par f, ou bien utiliser le fait que f atteigne ses bornes.

5. **1.** Utiliser la quantité conjuguée.

   2. Montrer qu'il n'y a pas de limite en utilisant une définition séquentielle.

   3. Utiliser proprement les croissances comparées.

   4. Faire un encadrement.

   5. Se rendre compte qu'un encadrement ne marche pas... Mais que vaut ce terme quand $x > 1$?

   6. Différencier les limites en $0+$ et $0-$

   7. Que vaut $\sin(p) - \sin(q)$?

7. Faire une analyse-synthèse : d'abord fixer y et faire tendre x vers 0, puis conclure.
9. Regarder la limite en un point qui n'est pas dans $\mathbb{Z}$, puis en un point entier en différenciant les limites à gauche et à droite.
10. Utiliser la définition du maximum et du minimum en termes de valeurs absolues.
11. Utiliser les théorèmes généraux pour les points non problématiques, puis faire des déterminations de limite pour étudier les prolongements par continuité.
12. Distinguer les cas $\alpha > 0$ et $\alpha \leqslant 0$. Pour l'un des deux cas, encadrer, et pour l'autre utiliser la définition séquentielle.
13. Essayer, à l'aide de fonctions usuelles, de se ramener à l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
14. Essayer de définir une fonction sur les rationnels et sur les irrationnels.
15. Raisonner par l'absurde en supposant que f change de signe, et **faire un dessin** pour comprendre quel théorème utiliser.
16. Utiliser $f - g$ et le fait que cette fonction atteint son maximum et mon minimum.
17. **1.** Utiliser $g : x \mapsto f(x) - f\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$.

    2. Poser une fonction modélisant le problème et s'annulant en 0 et en 1.

    3. Poser $g : x \mapsto f(x) - f\left(x + \dfrac{1}{n}\right)$ et regarder $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$.

    4. Utiliser un sin.
18. Montrer que f est injective, puis qu'elle est continue, puis qu'elle est bijective.
19. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est $f([0,1])$.
20. Pour la bijection, penser à la stricte monotonie. Pour la surjectivité, penser à construire quelque chose à partir de $\dfrac{\sin(x)}{x}$.
21. Démontrer la stricte monotonie, puis supposer qu'on a un x tel que $x < f(x)$ ou que $f(x) < x$.
22. Montrer que $\forall y \in \mathbb{R},\ \forall A > 0, \exists x \geqslant A,\ f(x) = y$.