

# MPSI

## Mathématiques Devoir surveillé 06 – partie commune

Samedi 16 janvier – 8h-10h30

- Durée : 2 heures 30.
- Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
- Le sujet est composé d'un seul problème.
- La présentation et le soin apporté aux réponses seront pris en compte dans la notation.  
**Encadrez, soulignez vos résultats et numérotez vos pages.**
- Lorsque vous utilisez le résultat d'une question précédente, **donnez le numéro de la question utilisée.**
- À tout moment, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour pouvoir continuer : il suffit de le préciser clairement sur la copie.
- Si vous voyez ce qui semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur la copie.
- Laissez de la place dans une marge à gauche pour pouvoir noter plus facilement le devoir.
- Une réponse fausse, si elle ne laisse pas paraître de calculs intermédiaires, compte 0 points ; avec calculs intermédiaires elle peut rapporter quelques points.

♪ Bon courage ! ♪

## Problème 1. Indice d'un lacet et théorème de D'Alembert-Gauss

### Définitions et notations

- On appelle chemin de  $\mathbb{C}$  toute application  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , c'est-à-dire dérivable, et de dérivée continue.
- Un lacet est un chemin dont les extrémités sont égales :  $\gamma(0) = \gamma(1)$ .

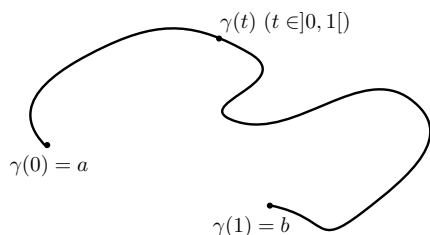


Figure 1 – Un chemin

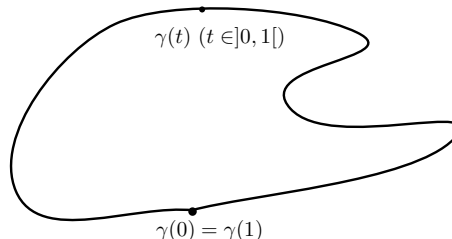


Figure 2 – Un lacet

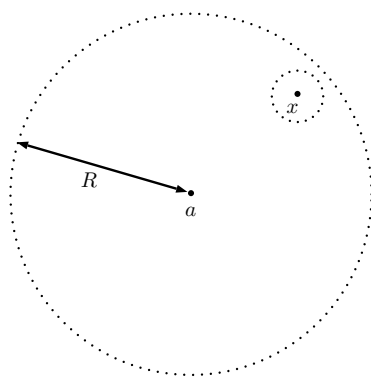
- On notera, pour tout  $a \in \mathbb{C}$  et  $r > 0$ ,  $D_r(a)$  le disque ouvert de rayon  $r$  centré en  $a$  :

$$D_r(a) = \{z \in \mathbb{C}, |z - a| < r\}.$$

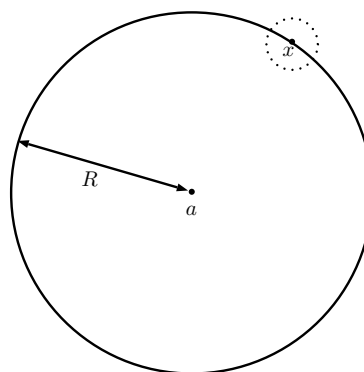
- Une partie  $U$  de  $\mathbb{C}$  est dite **ouverte** quand elle contient un petit disque autour de chacun de ses points, c'est-à-dire

$$\forall x \in U, \exists \eta > 0, D_\eta(x) \subset U.$$

En particulier, on pourra admettre qu'un disque ouvert est ouvert.



Disque ouvert



Disque fermé : problème avec x

Figure 3 – Un disque ouvert est ouvert. En revanche, si on considérait le disque **fermé**, c'est-à-dire contenant aussi le cercle de rayon  $R$ , il ne serait pas ouvert : en tout point  $x$  du cercle, tout disque  $D_\eta(x)$  possède des points en-dehors du disque fermé, quel que soit  $\eta > 0$ .

- Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction. On dit que  $f$  est continue sur  $U$  quand

$$\forall a \in U, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall z \in U, |a - z| \leq \eta \Rightarrow |f(a) - f(z)| \leq \varepsilon.$$

## A. Questions préliminaires

- On se donne un ouvert  $U$  et une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  continue; on se donne également un chemin  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ , à valeurs dans  $U$ . Montrer alors que  $f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  est continue.
- Démontrer qu'une fonction  $f$  continue sur un intervalle  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  est nécessairement constante.
- Soit  $R > 0$ ,  $b \in \mathbb{C}$ . On note  $U_R(b)$  l'ensemble  $U_R(b) = \{z \in \mathbb{C}, |z - b| > R\}$ .
  - Démontrer que  $U_R$  est ouvert. *On fera un dessin !*
  - On admet que** deux points quelconques de  $U_R(b)$  peuvent toujours être joints par un chemin, c'est-à-dire pour tout  $(x_1, x_2) \in U_R^2(b)$ , il existe  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U_R$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ , tel que  $\gamma(0) = x_1$  et  $\gamma(1) = x_2$ . Faire un dessin illustrant ce résultat. *On ne demande pas de démontrer le résultat !*
  - Démontrer qu'une fonction  $f : U_R(b) \rightarrow \mathbb{C}$  continue et à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  est nécessairement constante.
- Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  un lacet,  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Démontrer que l'application  $\delta : \begin{cases} [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto |\gamma(t) - z_0| \end{cases}$  est majorée et minorée. Démontrer que si, de plus,  $z_0$  n'appartient pas à l'image de  $\gamma$ , alors  $\delta$  est minorée par un réel strictement positif. *On illustrera la situation.*

## B. Indice d'un lacet

### B-I. Définition de l'indice

Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  un lacet et  $\Omega$  le complémentaire de l'image de  $\gamma$ .

- Montrer que  $\Omega$  est ouvert. *On pourra utiliser la question 4.*

Pour tout point  $a \in \Omega$  on définit alors l'indice de  $\gamma$  par rapport à  $a$ , noté  $\text{Ind}_a(\gamma)$ , par

$$\text{Ind}_a(\gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a} dt.$$

- Dans cette question seulement**, on étudie un exemple, en prenant  $\gamma : \begin{cases} [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \\ \theta \mapsto Re^{2ni\pi\theta} \end{cases}$ , où  $R > 0$  et  $n \in \mathbb{Z}$ . Calculer alors  $\text{Ind}_0(\gamma)$ .

- L'indice est souvent présenté comme le « nombre de tours » qu'une courbe fait autour d'un point. Cette interprétation est-elle cohérente avec le résultat de la question 6. ?

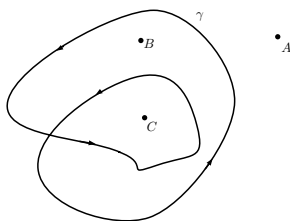


Figure 4 – Ici,  $\text{Ind}_A(\gamma) = 0$ ,  $\text{Ind}_B(\gamma) = 1$ ,  $\text{Ind}_C(\gamma) = 2$

**B-II. L'indice est une fonction continue.**

On revient au cas général d'un lacet  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , et on note toujours  $\Omega$  le complémentaire de l'image de  $\gamma$ .

8. On considère un point  $a \in \Omega$ .

(a) Démontrer l'existence d'un réel  $r > 0$  tel que le disque  $D_{2r}(a)$  de centre  $a$  et de rayon  $2r$  soit inclus dans  $\Omega$ .

(b) Montrer alors pour tout  $z \in D_r(a)$  l'inégalité

$$|\text{Ind}_z(\gamma) - \text{Ind}_a(\gamma)| \leq \frac{|z - a|}{4\pi r^2} \int_0^1 |\gamma'(t)| dt.$$

9. En déduire que l'application  $a \mapsto \text{Ind}_a(\gamma)$  est continue.

**B-III. L'indice est toujours un nombre entier**

On considère toujours un lacet  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , et on se donne  $a \in \Omega$ . Pour tout  $t$  dans  $[0, 1]$ , on définit alors  $\psi(t)$  par

$$\psi(t) = \exp \left( \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - a} ds \right)$$

10. Démontrer que  $\frac{\psi}{\gamma - a}$  est constante.

11. En déduire, en évaluant la fonction  $\frac{\psi}{\gamma - a}$  en 0 et en 1, que  $\text{Ind}_a(\gamma) \in \mathbb{Z}$ .

**B-IV. Indice en dehors d'un disque**

On se donne un lacet  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  et un point  $b \in \mathbb{C}$ .

12. Montrer qu'il existe un réel  $R > 0$  tel que le lacet  $\gamma$  soit à l'intérieur du disque ouvert de centre  $b$  et de rayon  $R$ . On pourra utiliser la question 4.

13. Soit  $a$  un point à l'extérieur de  $D_R(b)$ . Montrer alors

$$|\text{Ind}_a(\gamma)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{|a - b| - R} \quad \text{où } M = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt.$$

14. En déduire que  $\text{Ind}_a(\gamma) = 0$ . On utilisera la continuité de l'indice sur  $\Omega$ .

**B-V. Deux lacets suffisamment « proches » ont même indice**

Soient  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  et  $\eta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  deux lacets ne passant pas par  $a$ . On fait l'hypothèse suivante, caractérisant en un sens que  $\gamma$  et  $\eta$  sont « assez proches » :

$$\forall t \in [0, 1], \quad |\gamma(t) - \eta(t)| < |\gamma(t) - a|. \quad (1)$$

Notre but est de montrer que  $\text{Ind}_a(\gamma) = \text{Ind}_a(\eta)$ . On pose, pour  $t$  dans  $[0, 1]$ ,  $\phi(t) = \frac{\eta(t) - a}{\gamma(t) - a}$ .

15. Démontrer que  $\phi$  est un lacet, et qu'il existe  $s \in ]0, 1[$  tel que l'image de  $\phi$  soit contenue dans  $D_s(1)$ . On pourra utiliser la question 4.

16. Vérifier que  $\text{Ind}_0(\phi) = \text{Ind}_a(\eta) - \text{Ind}_a(\gamma)$ .

17. Conclure.

### C. Le théorème de D'Alembert-Gauss : partie non notée, à faire en DM

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ , de degré  $n \geq 1$ . On écrit  $P = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$ .

On va démontrer que  $P$  possède une racine. Supposons, par l'absurde, que  $P$  ne s'annule pas.

Soit, pour  $R \geq 0$ ,  $\gamma_R$  le lacet de  $\mathbb{C}^*$  :

$$\gamma_R : \begin{cases} [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \\ \theta \mapsto P(Re^{2i\pi\theta}) \end{cases}.$$

18. Soit  $A > 0$ . Montrer que pour tous  $R$  et  $R'$  dans  $[0, A]$  et pour tout  $\theta$  dans  $[0, 1]$ ,

$$|\gamma_R(\theta) - \gamma_{R'}(\theta)| \leq M|R - R'|,$$

$$\text{où } M = (n+1)A^n \sum_{k=0}^n |a_k|.$$

19. Justifier que pour tout  $R \geq 0$ ,  $\inf_{\theta \in [0,1]} P(Re^{2i\pi\theta})$  existe et est strictement positif.

20. Utiliser les questions 17. et 19. pour démontrer l'existence, pour  $R \geq 0$  donné, d'un  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\forall R' \geq 0, |R - R'| < \varepsilon \implies \text{Ind}_0(\gamma_R) = \text{Ind}_0(\gamma_{R'}).$$

21. Montrer que  $\text{Ind}_0(\gamma_R)$  ne dépend pas du choix de  $R > 0$ .

On pose, si  $R > 0$ ,

$$\eta_R : \begin{cases} [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \\ \theta \mapsto a_n R^n e^{in \cdot 2\pi\theta} \end{cases}$$

22. Déterminer  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{|\eta_R(\theta) - \gamma_R(\theta)|}{|\eta_R(\theta)|}$ .

23. Démontrer alors que, pour  $R$  assez grand,  $|\eta_R(\theta) - \gamma_R(\theta)| < |\eta_R(\theta)|$ . En déduire la valeur de  $\text{Ind}_0(\gamma_R)$  (pour  $R$  assez grand).

24. Déterminer  $\text{Ind}_0(\gamma_0)$  et conclure.