MPSI

Mathématiques
Devoir surveillé 06 – partie commune

Samedi 16 janvier – 8h-10h30

- Durée : 2 heures 30.
- Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
- Le sujet est composé d'un seul problème.
- La présentation et le soin apporté aux réponses seront pris en compte dans la notation. **Encadrez, soulignez vos résultats** et **numérotez vos pages**.
- Prenez **5 minutes** pour lire le sujet et décider de la stratégie que vous adopterez.
- À tout moment, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour pouvoir continuer : il suffit de le préciser clairement sur la copie.
- Si vous voyez ce qui semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur la copie.
- Laissez de la place dans une marge à gauche pour pouvoir noter plus facilement le devoir.
- Une réponse fausse, si elle ne laisse pas paraître de calculs intermédiaires, compte 0 points ; avec calculs intermédiaires elle peut rapporter quelques points.

♫ Bon courage ! ♫

Problème 1. Indice d'un lacet et théorème de D'Alembert-Gauss

Définitions et notations

- On appelle chemin de $\mathbb{C}$ toute application $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$, c'est-à-dire dérivable, et de dérivée continue.
- Un lacet est un chemin dont les extrémités sont égales : $\gamma(0) = \gamma(1)$.

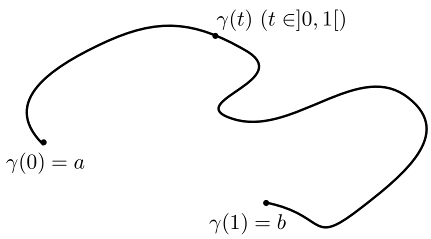


Figure 1 – Un chemin

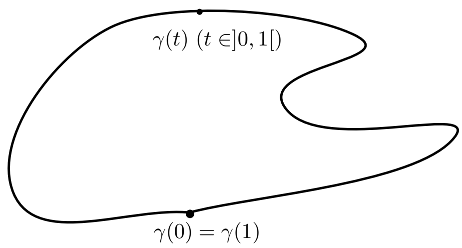


Figure 2 – Un lacet

- On notera, pour tout $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, $D_r(a)$ le disque ouvert de rayon r centré en a :

$$D_r(a) = \{z \in \mathbb{C},\ |z - a| < r\}.$$

- Une partie U de $\mathbb{C}$ est dite **ouverte** quand elle contient un petit disque autour de chacun de ses points, c'est-à-dire

$$\forall x \in U,\ \exists \eta > 0,\ D_\eta(x) \subset U.$$

En particulier, on pourra admettre qu'un disque ouvert est ouvert.

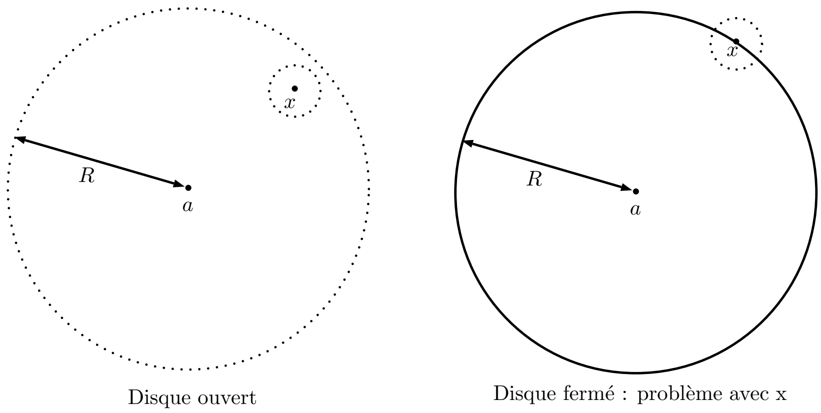


Figure 3 – Un disque ouvert est ouvert. En revanche, si on considérait le disque **fermé**, c'est-à-dire contenant aussi le cercle de rayon R, il ne serait pas ouvert : en tout point x du cercle, tout disque $D_\eta(x)$ possède des points en-dehors du disque fermé, quel que soit $\eta > 0$.

- Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est continue sur U quand

$$\forall a \in \mathbb{C},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall z \in U,\ |a - z| \leqslant \eta \Rightarrow |f(a) - f(z)| \leqslant \varepsilon.$$

A. Questions préliminaires

1. On se donne un ouvert U et une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ continue ; on se donne également un chemin $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$, à valeurs dans U. Montrer alors que $f \circ \gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ est continue.

Correction. Soit $t_0 \in [0, 1]$, $\varepsilon > 0$. Notons $a = \gamma(t_0)$. $a \in U$
f est continue en a, donc on dispose de $\eta > 0$ tel que

$$\forall z \in U,\ |a - z| \leqslant \eta \Rightarrow |f(a) - f(z)| \leqslant \varepsilon. \qquad (1)$$

γ est continue en t_0 donc on dispose de $\beta > 0$ tel que

$$\forall s \in [0, 1],\ |s - t_0| \leqslant \beta \Rightarrow |\gamma(s) - \gamma(t)| \leqslant \eta. \qquad (2)$$

Soit alors $s \in [0, 1]$ tel que $|s - t_0| \leqslant \beta$. Par (2), $|\gamma(s) - \gamma(t_0)| \leqslant \eta$. Donc, par (1),

$$|f(\gamma(s)) - f(\gamma(t_0))| \leqslant \varepsilon,$$

donc $f \circ \gamma$ est continue en t_0.
D'où la continuité de $f \circ \gamma$ sur $[0, 1]$.

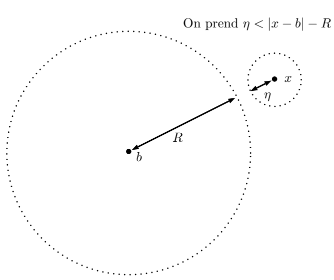
2. Démontrer qu'une fonction f continue sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est nécessairement constante.

Correction. Par l'absurde, supposons que f ne soit pas constante sur I. Alors on dispose de $(x, y) \in \mathrm{I}^2$, tels que $x < y$ et $f(x) \neq f(y)$. Sans perte de généralité, on peut supposer $f(x) < f(y)$.
Comme $f(x)$ et $f(y)$ sont entiers, $f(x) \leqslant f(y) - 1$. Posons alors $M = f(x) + \dfrac{1}{2}$. Alors $\boxed{\text{f(x)<M<f(y)}}$. Comme f est continue sur I, par le théorème des valeurs intermédiaires (TVI), il existe $z \in [x, y]$ tel que $f(z) = M \notin \mathbb{Z}$. Absurde !
$\boxed{\text{Donc } f \text{ est constante.}}$

3. Soit $R > 0$, $b \in \mathbb{C}$. On note $U_R(b)$ l'ensemble $U_R = \{z \in \mathbb{C}, |z - b| > R\} = \mathbb{C} \backslash D_R(b)$.

(a) Démontrer que U_R est ouvert. *On fera un dessin !*

Correction. On dessine :



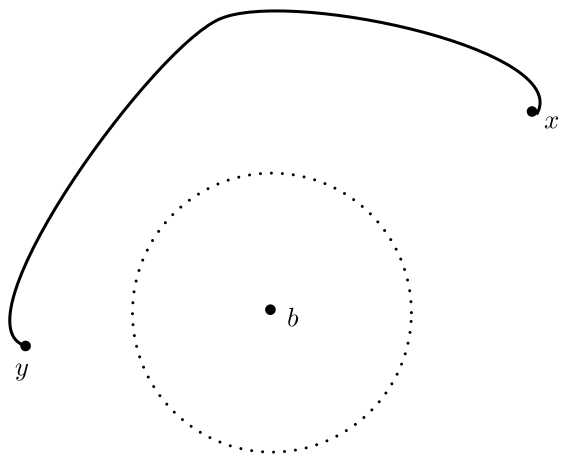
Soit $x \in U_R(b)$. Posons $\eta = \dfrac{|x-b|-R}{2} > 0$. Soit $y \in D_x(\eta)$. Alors $|y-x| \leqslant \eta$ et, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |y-b| &\geqslant \big||y-x|-|x-b|\big| \\ &\geqslant |x-b|-|y-x| \\ &\geqslant |x-b|-\frac{\eta}{2} > |x-b|-\eta > R, \end{aligned}$$

donc $\boxed{y \in U_R(b)}$. $\boxed{\text{Donc } U_R(b) \text{ est un ouvert.}}$

(b) On admet que deux points quelconques de $U_R(b)$ peuvent toujours être joints par un chemin, c'est-à-dire pour tout $(x_1, x_2) \in U_R^2(b)$, il existe $\gamma : [0,1] \to U_R$, de classe $\mathscr{C}^1$, tel que $\gamma(0) = x_1$ et $\gamma(1) = x_2$. Illustrer ce résultat : on représentera un disque $D_R(b)$, deux points dans $U_R(b)$ et un chemin reliant les deux points.

Correction. L'idée est que l'on peut toujours rejoindre deux points par un chemin qui ne croisera pas le cercle. Attention à ne pas toujours penser à la ligne droite !



(c) Démontrer qu'une fonction $f : U_R(b) \to \mathbb{C}$ continue et à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est nécessairement constante.

Correction. Supposons, par l'absurde, que f ne soit pas constante. Alors il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $a \neq b$ et $f(a) \neq f(b)$. De même que précédemment, on peut supposer $f(a) < f(b)$

Soit $\gamma : [0,1] \to U$ un chemin reliant a à b. Alors

- par la question 1., $f \circ \gamma$ est continue sur $[0,1]$,
- si $M = f(a) + \dfrac{1}{2}$, alors $f \circ \gamma(0) < M < f \circ \gamma(1)$,

donc, d'après le TVI, on dispose de $s \in [0,1]$ tel que $f(s) = M \notin \mathbb{Z}$, absurde ! $\boxed{\text{Donc } f \text{ est constante.}}$

4. Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ un lacet, $z_0 \in \mathbb{C}$. Démontrer que l'application $\delta : \left| \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto |\gamma(t) - z_0| \end{array} \right.$ est majorée et minorée. Démontrer que si, de plus, z_0 n'appartient pas à l'image de γ, alors δ est minorée par un réel strictement positif. *On illustrera la situation.*

Correction. Comme le module est continu, $t \mapsto |\gamma(t) - z_0|$ est continue par la question 1., sur le **segment** $[0,1]$. Par le théorème des bornes atteintes, elle est bornée et atteint ses bornes : elle est en particulier majorée et minorée.
De plus, on dispose de $t_0 \in [0,1]$ tel que $|\gamma(t_0) - z_0| = \min\limits_{s \in [0,1]} \delta(s)$. Si z_0 n'appartient pas à l'image de γ, alors $|\gamma(t_0) - z_0| > 0$, donc δ est minorée par un réel strictement positif.

B. Indice d'un lacet

B-I. Définition de l'indice

Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ un lacet et Ω le complémentaire de l'image de γ.

5. Montrer que Ω est ouvert. *On pourra utiliser la question 4.*

Correction. Soit $z_0 \in \Omega$. Par la question 4., la fonction δ définie à cette question est minorée par un réel strictement positif η. Donc

$$\forall t \in [0,1], |\gamma(t) - z_0| > \eta,$$

ce qui signifie que l'image de γ se situe $\boxed{\text{en-dehors du disque } D_\eta(z_0)}$. Ainsi $D_\eta(z_0) \subset \Omega$, donc $\boxed{\Omega \text{ est ouvert.}}$

Pour tout point $a \in \Omega$ on définit alors l'indice de γ par rapport à a, noté $\mathrm{Ind}_a(\gamma)$, par

$$\mathrm{Ind}_a(\gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a} dt.$$

6. Dans cette question seulement, on étudie un exemple $\gamma : \left| \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{C} \\ \theta \mapsto Re^{2ni\pi\theta} \end{array} \right.$, où $R > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$. Calculer alors $\mathrm{Ind}_0(\gamma)$.

Correction. Calculons l'intégrale :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}_0(\gamma) &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a} dt \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{2ni\pi Re^{2ni\pi\theta}}{Re^{2ni\pi\theta} - 0} d\theta \\ &= \frac{2ni\pi}{2i\pi} \int_0^1 d\theta = n. \end{aligned}$$

7. L'indice est souvent présenté comme le « nombre de tours » qu'une courbe fait autour d'un point. Cette interprétation est-elle cohérente avec le résultat de la question 6. ?

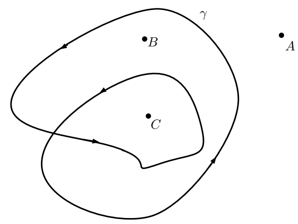


Figure 4 – Ici, $\mathrm{Ind}_A(\gamma) = 0$, $\mathrm{Ind}_B(\gamma) = 1$, $\mathrm{Ind}_C(\gamma) = 2$

Correction. Cette interprétation est tout à fait cohérente, car quand t parcourt $[0, 1]$, le point d'affixe $\gamma(t)$ parcourt, dans le sens trigonométrique, le cercle de centre 0 et de rayon R. De plus, quand θ varie de 0 à 1, $2n\pi\theta$ varie de 0 à $2n\pi$: au bout du compte, on a fait n tours de cercle, qui sont ainsi comptés par $\mathrm{Ind}_0(\gamma)$.

B-II. L'indice est une fonction continue.

On revient au cas général d'un chemin $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

8. On considère un point $a \in \Omega$.

(a) Utiliser la question 5. pour démontrer l'existence d'un réel $r > 0$ tel que le disque $D_{2r}(a)$ de centre a et de rayon $2r$ soit inclus dans Ω.

Correction. On sait, par la question 5., que le complémentaire de γ, Ω, est ouvert. Or, $a \in \Omega$, donc on dispose de $\eta > 0$ tel que $D_\eta(a) \subset \Omega$.

$\boxed{\text{En posant } r = \frac{\eta}{2}, \text{ on obtient que } D_{2r}(a) \subset \Omega.}$

(b) Montrer alors pour tout $z \in D_{\mathbf{r}}(a)$ l'inégalité

$$|\mathrm{Ind}_z(\gamma) - \mathrm{Ind}_a(\gamma)| \leqslant \frac{|z-a|}{4\pi r^2} \int_0^1 |\gamma'(t)|dt$$

Correction. Soit $z \in D_r(a)$. Alors

$$\begin{aligned}
|\mathrm{Ind}_z(\gamma) - \mathrm{Ind}_a(\gamma)| &= \left|\frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} - \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}dt\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \left|\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} - \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}\right| dt \text{ par inégalité triangulaire} \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^1 |\gamma'(t)|\left|\frac{\gamma(t)-a-(\gamma(t)-z)}{(\gamma(t)-z)(\gamma(t)-a)}\right| dt \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^1 |\gamma'(t)|\frac{|a-z|}{(|\gamma(t)-z)(\gamma(t)-a)|}dt
\end{aligned}$$

Or, $|\gamma(t)-a| \geqslant 2r$ et

$$|\gamma(t)-z| = |\gamma(t)-a+a-z| \geqslant |\gamma(t)-a| - |a-z| \geqslant 2r - r = r,$$

donc

$$\frac{|a-z|}{(|\gamma(t)-z)(\gamma(t)-a)|} \leqslant \frac{|a-z|}{2r^2},$$

d'où

$$\boxed{|\mathrm{Ind}_z(\gamma) - \mathrm{Ind}_a(\gamma)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{|a-z|}{2r^2}\int_0^1 |\gamma'(t)|dt,}$$

ce qui est le résultat désiré !

9. En déduire que l'application $a \mapsto \mathrm{Ind}_a(\gamma)$ est continue.

Correction. Soit $a \in \mathbb{C}$, r comme défini à la question précédente. Notons $C = \dfrac{1}{4^2}\displaystyle\int_0^1 |\gamma'(t)|dt$. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\eta = \dfrac{\varepsilon}{C}$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z-a| \leqslant \eta$. Alors

$$|\mathrm{Ind}_a(\gamma) - \mathrm{Ind}_z(\gamma)| \leqslant C|z-a| \leqslant C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon,$$

$\boxed{\text{d'où la continuité de } x \mapsto \mathrm{Ind}_x(\gamma).}$

B-III. L'indice est toujours un nombre entier

On considère toujours un chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et on se donne $a \in \Omega$. Pour tout t dans $[0,1]$, on définit alors $\psi(t)$ par

$$\psi(t) = \exp\left(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-a}ds\right)$$

10. Démontrer que $\dfrac{\psi}{\gamma - a}$ est constante.

Correction. La fonction $\xi : t \mapsto \dfrac{\psi(t)}{\gamma(t)-a}$ est dérivable comme composée de fonctions dérivables. Sa dérivée est alors, pour tout t dans $[0,1]$,

$$\xi'(t) = \frac{\psi'(t)(\gamma(t)-a) - \psi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t)-a)^2}.$$

Or,

$$\psi'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}\psi(t),$$

donc

$$\xi'(t) = \frac{\gamma'(t)\psi(t) - \psi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t)-a)^2} = 0.$$

$\boxed{\xi \text{ est de dérivée nulle sur l'}\textbf{intervalle } [0,1]\text{, elle est donc constante.}}$

11. En déduire, en évaluant la fonction $\dfrac{\psi}{\gamma - a}$ en 0 et en 1, que $\mathrm{Ind}_a(\gamma) \in \mathbb{Z}$.

Correction. Or,

$$\xi(0) = \frac{1}{\gamma(0)-a} \text{ et } \xi(1) = \frac{e^{\int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-a}ds}}{\gamma(1)-a} = \frac{e^{\int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-a}ds}}{\gamma(0)-a}.$$

Donc $e^{\int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-a}ds} = 1$, donc on dispose de k dans $\mathbb{Z}$ tel que

$$\int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-a}ds = 2ik\pi,$$

donc

$$\boxed{\mathrm{Ind}_a(\gamma) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-a}ds = k \in \mathbb{Z}.}$$

Donc $\mathrm{Ind}_a(\gamma)$ est un entier.

B-IV. Indice en dehors d'un disque

On se donne un lacet $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ et un point $b \in \mathbb{C}$.

12. Montrer qu'il existe un réel $R > 0$ tel que le lacet γ soit à l'intérieur du disque ouvert de centre b et de rayon R. *On pourra utiliser la question 4.*

Correction. On sait, par la question 4., que $\delta : t \mapsto |\gamma(t) - b|$ est majorée. Ainsi on dispose de $M > 0$ tel que $\forall t \in [0,1], |\gamma(t) - b| \leqslant M$. Ainsi,

$$\forall t \in [0,1], |\gamma(t) - b| < 2M,$$

ce qui signifie que $\boxed{\text{le lacet } \gamma \text{ est contenu dans } D_R(b)\text{, en posant } R = 2M.}$

13. Soit a un point à l'extérieur de $D_R(b)$. Montrer alors

$$|\mathrm{Ind}_a(\gamma)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{M}{|a-b|-R},$$

où $M = \displaystyle\int_0^1 |\gamma'(t)|dt$.

Correction. Majorons $|\mathrm{Ind}_a(\gamma)|$:

$$\begin{aligned}|\mathrm{Ind}_a(\gamma)| &= \left|\frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-a}ds\right| \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \left|\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-a}\right| ds \text{par inégalité triangulaire.}\end{aligned}$$

Or,

$$|\gamma(s)-a| = |\gamma(s)-b+b-a| \geqslant |a-b| - |\gamma(s)-b| \geqslant |a-b|-R,$$

car on a supposé que $|\gamma(s)-b| \leqslant R$. Ainsi,

$$\boxed{|\mathrm{Ind}_a(\gamma)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{|\gamma'(s)|}{|a-b|-R}ds = \frac{1}{2\pi}\frac{M}{|a-b|-R}.} \quad (3)$$

14. En déduire que $\mathrm{Ind}_a(\gamma) = 0$. On utilisera la continuité de l'indice sur Ω.

Correction. *Remarque importante : là, on peut vouloir « faire tendre quelque chose vers $+\infty$ » pour avoir . Problème : on a a qui est complexe.*
La fonction $z \mapsto \mathrm{Ind}_z(\gamma)$ est **continue** sur $U_R(b)$ (question 9.), et à valeurs dans $\mathbb{Z}$ (question 11.) donc, d'après la question 3.c, $z \mapsto \mathrm{Ind}_z(\gamma)$ est constante sur $U_R(b)$.
Soit $t \geqslant 1$. Alors si $a_t = b + t(a-b)$, $|a_t - b| = |t|.|a-b| > R$, donc $a_t \in U_R$.
Alors, $\boxed{\mathrm{Ind}_a(\gamma) = \mathrm{Ind}_{a_t}(\gamma)}$. Ainsi, par la question précédente,

$$|\mathrm{Ind}_a(\gamma)| = |\mathrm{Ind}_{a_t}(\gamma)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{M}{|a_t-b|-R} = \frac{1}{2\pi}\frac{M}{t.|a-b|-R} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, par encadrement, et comme $\mathrm{Ind}_a(\gamma)$ ne dépend pas de t, $\boxed{\mathrm{Ind}_a(\gamma) = 0}$.

B-V. Deux lacets suffisamment « proches » ont même indice

Soient $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ et $\eta : [0,1] \to \mathbb{C}$ deux lacets ne passant pas par a. On fait l'hypothèse suivante, caractérisant en un sens que γ et η sont « assez proches » :

$$\forall t \in [0,1],\ |\gamma(t) - \eta(t)| < |\gamma(t) - a|. \quad (4)$$

Notre but est de montrer que $\mathrm{Ind}_a(\gamma) = \mathrm{Ind}_a(\eta)$. On pose, pour t dans $[0,1]$, $\phi(t) = \dfrac{\eta(t)-a}{\gamma(t)-a}$.

15. Démontrer que ϕ est un lacet, et qu'il existe $s \in]0,1[$ tel que l'image de ϕ soit contenue dans $D_s(1)$. *On pourra utiliser la question 4.*

Correction. ϕ est bien défini sur $[0,1]$ (car $t \mapsto \gamma(t) - a$ ne s'annule pas sur $[0,1]$), il est $\mathscr{C}^1$ comme quotient de fonctions $\mathscr{C}^1$. Ensuite, si $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}|\phi(t) - 1| &= \left|\frac{\eta(t) - a}{\gamma(t) - a} - 1\right| \\ &= \left|\frac{\eta(t) - a - (\gamma(t) - a)}{\gamma(t) - a}\right| \\ &= \left|\frac{\eta(t) - \gamma(t)}{\gamma(t) - a}\right| \\ &= \frac{|\eta(t) - \gamma(t)|}{|\gamma(t) - a|} \\ &< 1 \text{ par hypothèse.}\end{aligned}$$

Or, $t \mapsto |\phi(t) - 1|$ atteint son maximum sur $[0,1]$ par la question 4., donc on dispose de $t_0 \in [0,1]$ tel que $|\phi(t_0) - 1| = \max\limits_{t\in[0,1]} |\phi(t_0) - 1|$. Comme $|\phi(t_0) - 1| < 1$, en posant $\boxed{s = \dfrac{1 + |\phi(t_0) - 1|}{2}}$, on obtient que $|\phi(t_0) - 1| < s < 1$ et

$$\boxed{\forall t \in [0,1],\ |\phi(t) - 1| \leqslant |\phi(t_0) - 1| < s},$$

i.e. $\boxed{\text{l'image de } \phi \text{ est contenue dans } D_s(1).}$

16. Vérifier que $\mathrm{Ind}_0(\phi) = \mathrm{Ind}_a(\eta) - \mathrm{Ind}_a(\gamma)$.

Correction. Effectuons le calcul :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_a(\eta) - \mathrm{Ind}_a(\gamma) &= \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{\eta'(t)}{\eta(t) - a} - \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a} dt \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{\eta'(t)(\gamma(t) - a) - \gamma'(t)(\eta(t) - a)}{(\eta(t) - a)(\gamma(t) - a)} dt\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_0(\phi) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{\phi'(t)}{\phi(t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{\frac{\eta'(t)(\gamma(t)-a)-\gamma'(t)(\eta(t)-a)}{(\gamma(t)-a)^2}}{\frac{\eta(t)-a}{\gamma(t)-a}} dt \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{\eta'(t)(\gamma(t) - a) - \gamma'(t)(\eta(t) - a)}{(\eta(t) - a)(\gamma(t) - a)} dt \\ &\boxed{= \mathrm{Ind}_a(\eta) - \mathrm{Ind}_a(\gamma).}\end{aligned}$$

17. Conclure.

Correction. On sait par la question 15. que ϕ est inclus dans $D_s(1)$. De plus, $0 \notin D_s(1)$. Donc, par la question 14., $\mathrm{Ind}_1(\phi) = 0$. On conclut alors au résultat désiré, c'est-à-dire que $\boxed{\mathrm{Ind}_a(\gamma) = \mathrm{Ind}_a(\eta).}$

C. Le théorème de D'Alembert-Gauss : partie non notée, à faire en DM

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré $n \geqslant 1$. On écrit $P = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$.
On va démontrer que P possède une racine. Supposons, par l'absurde, que P ne s'annule pas.
Soit, pour $R \geqslant 0$, γ_R le lacet de $\mathbb{C}^*$:

$$\gamma_R : \left| \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{C} \\ \quad \theta \mapsto P(Re^{2i\pi\theta}) \end{array} \right. .$$

18. Soit $A > 0$. Montrer que pour tous R et R' dans $[0, A]$ et pour tout θ dans $[0, 1]$,

$$|\gamma_R(\theta) - \gamma_{R'}(\theta)| \leqslant M|R - R'|,$$

où $M = (n+1)A^n \sum_{k=0}^{n} |a_k|$.

19. Justifier que pour tout $R \geqslant 0$, $\inf\limits_{\theta \in [0,1]} P(Re^{2i\pi\theta})$ existe et est strictement positif.

20. Utiliser les questions 17. et 19. pour démontrer l'existence, pour $R \geqslant 0$ donné, d'un $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall R' \geqslant 0,\ |R - R'| < \varepsilon \Longrightarrow \mathrm{Ind}_0(\gamma_R) = \mathrm{Ind}_0(\gamma_{R'}).$$

21. Montrer que $\mathrm{Ind}_0(\gamma_R)$ ne dépend pas du choix de $R > 0$.

On pose, si $R > 0$,

$$\eta_R : \left| \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{C} \\ \quad \theta \mapsto a_n R^n e^{in.2\pi\theta} \end{array} \right.$$

22. Déterminer $\lim\limits_{R \to +\infty} \dfrac{|\eta_R(\theta) - \gamma_R(\theta)|}{|\eta_R(\theta)|}$.

23. Démontrer alors que, pour R assez grand, $|\eta_R(\theta) - \gamma_R(\theta)| < |\eta_R(\theta)|$. En déduire la valeur de $\mathrm{Ind}_0(\gamma_R)$ (pour R assez grand).

24. Déterminer $\mathrm{Ind}_0(\gamma_0)$ et conclure.