MPSI 1

Mathématiques
DS 04

Samedi 6 décembre – 8h-12h

- Durée : 4 heures.
  — Prenez **10 minutes** pour lire le sujet en entier et décider de la stratégie que vous adopterez.
  — Prenez **10 minutes** au moins à la fin des 4 heures pour vous relire !
- Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
- Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.
- **Consignes de présentations.**
  — Les pages doivent être **numérotées.**
  — Les résultats doivent être **mis en valeur** (encadrés ou soulignés).
  — Les questions doivent être **numérotées**. Une question non numérotée, c'est une question potentiellement non corrigée.
  — Les questions doivent être **faites dans l'ordre** : si vous admettez une question, laissez de la place à l'endroit où elle est censée être pour y revenir ensuite. Changez de copie ou de page quand vous changez de grande partie.
- À tout moment, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour pouvoir continuer : il suffit de le préciser clairement sur la copie.
- Si vous voyez ce qui semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur la copie.
- Laissez de la place dans une marge à gauche pour pouvoir noter plus facilement le devoir.
- Une réponse fausse, si elle ne laisse pas paraître de calculs intermédiaires, compte 0 points ; avec calculs intermédiaires elle peut rapporter quelques points.

♫ Bon courage ! ♫

Problème 1. Applications des intégrales de Wallis

A. Premiers calculs

On définit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n dt$.

1. Calculer W_0, W_1 et W_2.
2. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n dt$.
3. Établir, pour $n \in \mathbb{N}$, une relation de récurrence entre W_n et W_{n+2}.
4. En déduire que pour tout entier $p \geqslant 0$, on a

$$\begin{cases} W_{2p} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}, \\ W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}. \end{cases}$$

5. Démontrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, puis en déduire que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n+1}$.
6. Calculer, pour n dans $\mathbb{N}$, $(n+1)W_nW_{n+1}$, et en déduire que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

B. Calcul de l'intégrale de Gauss

On note, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $G_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2} dt$. On pose aussi, si $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx$ et $B_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx$.

7. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\forall t \in [0, \sqrt{n}], \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

8. Démontrer, en posant un bon changement de variables, que $A_n = \sqrt{n}W_{2n+1}$.
9. Démontrer, en posant $x = \sqrt{n}\tan(t)$, que $B_n \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}$.
10. En déduire la convergence de G_n ainsi que de la suite $\left(\displaystyle\int_0^n \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$, en précisant la valeur de leur limite.

C. Calcul de $\zeta(2)$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos(t)^{2n}\, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad K_n = \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}J_n$$

11. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $W_{2n} = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2J_n$.
    On utilisera l'expression $W_{2n} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{2n} dt$.
12. En déduire que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $K_{n-1} - K_n = \dfrac{\pi}{4n^2}$.

13. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\dfrac{\pi}{4}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = J_0 - K_n$.

14. Illustrer **graphiquement** (on ne demande pas de preuve) que pour tout t de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2}{\pi}t \leqslant \sin(t)$, puis démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi^2}{4(2n+1)}.$$

15. En utilisant l'équivalent de Stirling, démontrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6}$.

Problème 2. Densité d'une partie de $\mathbb{N}$

Pour être sûr que vous lisez bien tout le DS avant de vous lancer, je vous demande d'écrire, en début de copie (pas tout en haut de la copie, mais là où vous commenceriez à répondre aux questions), « Bonne fête monsieur ! ». Je mettrai un point sur le barème.

Le but de ce problème est de s'intéresser à la notion de densité d'une partie de $\mathbb{N}$. On rappelle que le cardinal d'une partie finie E, noté $\mathrm{Card}(E)$, est son nombre d'éléments. On précise que

- si $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et $a \leqslant b$, $\mathrm{Card}([\![a, b]\!]) = b - a + 1$,
- si $A \subset B$ et B est une partie finie de $\mathbb{N}$, alors A est une partie finie de $\mathbb{N}$ et $\mathrm{Card}(A) \leqslant \mathrm{Card}(B)$,
- si $A \subset B$, $\mathrm{Card}(B \setminus A) = \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A)$.

La densité d'une partie $A \subset \mathbb{N}$ est, quand elle existe, la limite

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathrm{Card}(A \cap [\![1, n]\!])$$

En d'autres termes, si u_n désigne le nombre d'éléments non nuls de A inférieurs ou égaux à n, $\delta(A) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n}$.

A. Généralités et quelques exemples

1. Justifier que la densité d'une partie de $\mathbb{N}$, si elle existe, est un réel de l'intervalle $[0, 1]$.

2. Quelle est la densité d'une partie finie de $\mathbb{N}$?

3. Soit A une partie admettant une densité égale à d. Démontrer que $\mathbb{N} \setminus A$ possède une densité, que l'on précisera.

4. On considère $D = \{10^k,\ k \in \mathbb{N}\}$. Déterminer la densité de D. A-t-on, pour toute partie A de $\mathbb{N}^*$, $\delta(A) = 0 \Rightarrow A$ est fini ?

B. Densité de certains ensembles arithmétiques

5. Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer la densité de l'ensemble $p\mathbb{N} = \{kp, k \in \mathbb{N}\}$.

Soient a et b deux entiers positifs premiers entre eux. On pose $E_{a,b} = \{au + bv,\ (u, v) \in \mathbb{N}^2\}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

6. Démontrer qu'il existe $(r, s) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $ar + bs = n$. Déterminer, en fonction de (r, s), l'ensemble des couples (u, v) dans $\mathbb{Z}$ tels que $au + bv = n$.

7. En déduire que si $n \geqslant ab$, alors il existe $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $ax + by = n$.

8. En déduire $\delta(E_{a,b})$.

C. Théorème de raréfaction des nombres premiers

On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Si $n \in \mathbb{N}$, on note

- $\pi(n)$ le nombre de premiers inférieurs ou égaux à n,
- α_n le produit de tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à n : $\alpha_n = \displaystyle\prod_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} p$.

9. Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\binom{2m+1}{m} \leqslant 4^m$.

10. Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{P}$ vérifiant $m+1 < p \leqslant 2m+1$, p divise $\displaystyle\binom{2m+1}{m}$.

En déduire que $\displaystyle\prod_{\substack{m+1 < p \leqslant 2m+1 \\ p \text{ premier}}} p \leqslant 4^m$.

11. En déduireque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \leqslant 4^n$.

12. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, pour tout $m \in [\![2, n]\!]$, $m^{\pi(n)-\pi(m)} \leqslant 4^n$ et en déduire que

$$\pi(n) \leqslant \frac{n \ln 4}{\ln m} + \pi(m).$$

13. Déterminer alors la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $\dfrac{\pi(n)}{n}$ et en déduire $\delta(\mathbb{P})$.

Hadamard et De la Vallée Poussin ont en fait démontré le théorème des nombres premiers :

$$\pi(n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n}{\ln(n)}$$

On admet ce théorème (démontrable en spé, mais c'est difficile !)

14. En quoi cela permet-il de retrouver la valeur de $\delta(\mathbb{P})$?

15. Notons p_n le n-ième nombre premier. Démontrer que $p_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n \ln(n)$.

On pourra déterminer une valeur évidente et un équivalent simple de $\pi(p_n)$.