MPSI 1

Mathématiques
DS 04

Samedi 6 décembre – 8h-12h

- Durée : 4 heures.
  - Prenez **10 minutes** pour lire le sujet en entier et décider de la stratégie que vous adopterez.
  - Prenez **10 minutes** au moins à la fin des 4 heures pour vous relire !
- Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
- Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.
- **Consignes de présentations.**
  - Les pages doivent être **numérotées.**
  - Les résultats doivent être **mis en valeur** (encadrés ou soulignés).
  - Les questions doivent être **numérotées**. Une question non numérotée, c'est une question potentiellement non corrigée.
  - Les questions doivent être **faites dans l'ordre** : si vous admettez une question, laissez de la place à l'endroit où elle est censée être pour y revenir ensuite. Changez de copie ou de page quand vous changez de grande partie.
- À tout moment, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour pouvoir continuer : il suffit de le préciser clairement sur la copie.
- Si vous voyez ce qui semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur la copie.
- Laissez de la place dans une marge à gauche pour pouvoir noter plus facilement le devoir.
- Une réponse fausse, si elle ne laisse pas paraître de calculs intermédiaires, compte 0 points ; avec calculs intermédiaires elle peut rapporter quelques points.

♫ Bon courage ! ♫

Problème 1. Applications des intégrales de Wallis

A. Premiers calculs

On définit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n dt$.

1. Calculer W_0, W_1 et W_2.

Correction

On calcule

$$W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^0 = \boxed{\frac{\pi}{2}}, \quad W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)dt = \boxed{1}$$
$$\text{et } W_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t)+1}{2} = \boxed{\frac{\pi}{4}.}$$

2. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n dt$.

Correction

C'est évident en posant le changement de variables $u = \dfrac{\pi}{2} - t$.

3. Établir, pour $n \in \mathbb{N}$, une relation de récurrence entre W_n et W_{n+2}.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrivons

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{n+1} \sin(t) dt.$$

Dans l'intégrale, faisons une intégration par parties, dérivons $t \mapsto \sin(t)^{n+1}$ en $t \mapsto (n+1)\cos(t)\sin(t)^n$ et intégrons $t \mapsto \sin(t)$ en $t \mapsto -\cos(t)$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
W_{n+2} &= \left[-\cos(t)\sin(t)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\cos(t)\sin(t)^n \cos(t) dt \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n \cos(t)^2 dt \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n \left(1 - \sin(t)^2\right) dt \\
&= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2},
\end{aligned}$$

d'où la relation

$$\boxed{W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.}$$

4. En déduire que pour tout entier $p \geqslant 0$, on a

$$\begin{cases} W_{2p} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}, \\ W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}. \end{cases}$$

Correction

Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathcal{P}_p$ suivante :

$$\begin{cases} W_{2p} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}, \\ W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}. \end{cases} \qquad (\mathcal{P}_p)$$

Initialisation. Pour $p = 0$, on a calculé en première question $W_0 = \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2\times 0)!}{2^{2\times 0}(0!)^2}$ et $W_1 = 1 = \dfrac{2^{2\times 0}(0!)^2}{(2\times 0+1)!}$.

Hérédité. Supposons que $\mathcal{P}_p$ est vraie pour un certain entier p. Alors

$$W_{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \text{ et } W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Or,

$$\begin{aligned} W_{2(p+1)} &= W_{2p+2} \\ &= \frac{2p+1}{2p+2}W_{2p} \text{ par la question précédente.} \\ &= \frac{2p+1}{2p+2}\frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \text{ par hypothèse de récurrence.} \\ &= \frac{\pi}{2}\frac{2p+1}{2(p+1)}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \\ &= \frac{\pi}{2}\frac{(2p+1)\times(2p)!}{2\times(p+1)\times 2^{2p}(p!)^2} \\ &= \frac{\pi}{2}\frac{(2p+1)!}{2^{2p+1}(p+1)\times(p!)^2} \\ &= \frac{\pi}{2}\frac{(2p+2)(2p+1)!}{2(p+1)2^{2p+1}(p+1)\times(p!)^2} \\ &= \frac{\pi}{2}\frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}(p+1)^2\times(p!)^2} \\ &= \frac{\pi}{2}\frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}\times((p+1)!)^2} = \boxed{\frac{\pi}{2}\frac{(2(p+1))!}{2^{2(p+1)}\times((p+1)!)^2}} \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
W_{2(p+1)+1} &= W_{2p+1+2} \\
&= \frac{2p+1+1}{2p+1+2} W_{2p+1} \text{ par la question précédente.} \\
&= \frac{2p+2}{2p+3} \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \text{ par hypothèse de récurrence.} \\
&= \frac{2(p+1)2^{2p}(p!)^2}{(2p+3)(2p+1)!} \\
&= \frac{4(p+1)^2 2^{2p}(p!)^2}{(2p+3)(2p+2)(2p+1)!} \\
&= \frac{2^{2(p+1)}((p+1)!)^2}{(2p+3)!} = \boxed{\frac{2^{2(p+1)}((p+1)!)^2}{(2(p+1)+1)!}}
\end{aligned}$$

La proposition est donc héréditaire.
Conclusion. Héréditaire et vraie au rang 0, la proposition $\mathcal{P}_p$ est vraie pour tout entier naturel p.

5. Démontrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, puis en déduire que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n+1}$.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout t dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \sin(t)^{n+1} \leqslant \sin(t)^n$, d'où, en intégrant, $\boxed{W_{n+1} \leqslant W_n}$. Ainsi, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$0 < W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n,$$

soit, en divisant par W_n,

$$\boxed{0 < \frac{n+1}{n+2} W_n \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n,}$$

d'où, en divisant par W_n qui est strictement positif,

$$0 < \frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1.$$

Ainsi, par $\boxed{\text{théorème d'encadrement,}}$ on en déduit que $\frac{W_{n+1}}{W_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc que $\boxed{W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n.}$

6. Calculer, pour n dans $\mathbb{N}$, $(n+1)W_nW_{n+1}$, et en déduire que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(n+2)W_{n+1}W_{n+2} = (n+2)W_{n+1}\frac{n+1}{n+2}W_n = (n+1)W_nW_{n+1},$$

donc la suite $((n+1)W_nW_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, égale à $W_0W_1 = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, pour tout

n dans $\mathbb{N}$, $W_nW_{n+1} = \dfrac{\pi}{2(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$. Mais $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n+1}$, donc

$$\boxed{W_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}, \text{ d'où } W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$$

B. Calcul de l'intégrale de Gauss

On note, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $G_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,dt$. On pose aussi, si $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx$ et $B_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx$.

7. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\forall t \in [0, \sqrt{n}], \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2} \leqslant \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

Correction

L'inégalité de gauche est évidente pour $t = \sqrt{n}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $t \in [0, \sqrt{n}[$. Alors

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right)}.$$

Or,

$$n\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leqslant n\frac{-t^2}{n} = -t^2,$$

donc $\boxed{\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2}.}$

Ensuite,

$$\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right)} \leqslant e^{n\frac{t^2}{n}} = e^{t^2},$$

d'où, en passant à l'inverse,

$$\boxed{e^{-t^2} \leqslant \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}.}$$

8. Démontrer, en posant un bon changement de variables, que $A_n = \sqrt{n}W_{2n+1}$.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans A_n, posons $x = \sqrt{n}\sin(t)$, i.e. $t = \operatorname{Arcsin}\dfrac{x}{\sqrt{n}}$. Quand $t = 0$, $x = 0$. Quand $t = \sqrt{n}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Ensuite,

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{n\sin(t)^2}{n}\right)^n = (\cos^2(t))^n = \cos(t)^{2n}.$$

Enfin, $\frac{dx}{dt} = \sqrt{n}\cos(t)$, c'est-à-dire que $dx = \sqrt{n}\cos(t)dt$. On en déduit que

$$\boxed{A_n = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{2n+1}dt = \sqrt{n}W_{2n+1}.}$$

9. Démontrer, en posant $x = \sqrt{n}\tan(t)$, que $B_n \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}$.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans B_n, posons $t = \operatorname{Arctan}(x/\sqrt{n})$. Quand $x = 0$, $t = 0$. Quand $x = \sqrt{n}$, $t = \frac{\pi}{4}$. Ensuite,

$$\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} = \left(1+\tan(t)^2\right)^{-n} = \left(\frac{1}{\cos^2(t)}\right)^{-n} = \cos(t)^{2n}.$$

Enfin, $\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{n}}{\cos(t)^2}$, donc $dx = \sqrt{n}\frac{dt}{\cos(t)^2}$. Ceci nous permet d'en déduire que

$$\begin{aligned} B_n &= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(t)^{2n-2}dt \\ &\leqslant \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{2n-2}dt = \sqrt{n}W_{2n-2}. \end{aligned}$$

D'où l'inégalité désirée !

10. En déduire la convergence de G_n ainsi que de la suite $\left(\int_0^n \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$, en précisant la valeur de leur limite.

Correction

On en déduit donc l'encadrement suivant : pour tout n dans $\mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant G_n \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}$$

Or,

$$\sqrt{n}W_{2n+1} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}\sqrt{2n+1}W_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}}\sqrt{(2n+1)W_{2n+1}^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

De même, $\sqrt{n}W_{2n-2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Donc, par théorème d'encadrement, $G_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

De plus, comme $\left(\int_0^n \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}} = (G_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$, qui est une suite extraite de $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit que

$$\int_0^n \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

C. Calcul de $\zeta(2)$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos(t)^{2n}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad K_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} J_n$$

11. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $W_{2n} = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$.

On utilisera l'expression $W_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{2n} dt$.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans W_{2n}, on fait une intégration par parties, en dérivant $t \mapsto \cos(t)^{2n}$ en $-2n\sin(t)\cos(t)^{2n-1}$ et en intégrant 1 en t. Ceci donne

$$\begin{aligned} W_{2n} &= \left[t\cos(t)^{2n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\cos(t)^{2n-1}dt \\ &= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\sin(t)\cos(t)^{2n-1}dt. \end{aligned}$$

Dans cette dernière intégrale, on intègre $t \mapsto 2t$ en $t \mapsto t^2$ et on dérive $t \mapsto \sin(t)\cos(t)^{2n-1}$ en $t \mapsto \cos(t)^{2n} - (2n-1)\sin(t)^2\cos(t)^{2n-2}$. Ceci donne

$$\begin{aligned} W_{2n} &= [nt^2 \times (\cos(t)^{2n} - (2n-1)\sin(t)^2\cos(t)^{2n-1})]_0^{\frac{\pi}{2}} - n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\left(\cos(t)^{2n} - (2n-1)\sin(t)^2\cos(t)^{2n-2}\right)dt \\ &= -n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\left(\cos(t)^{2n} - (2n-1)\sin(t)^2\cos(t)^{2n-2}\right)dt \\ &= -n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos(t)^{2n}dt + n(2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^2\cos(t)^{2n-2}dt \\ &= -n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos(t)^{2n}dt + n(2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(t)^2)\cos(t)^{2n-2}dt \\ &= -nJ_n + n(2n-1)J_{n-1} - n(2n-1)J_n \\ &\boxed{= n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2J_n.} \end{aligned}$$

12. En déduire que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $K_{n-1} - K_n = \dfrac{\pi}{4n^2}$.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}
K_{n-1} - K_n &= \frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-2)!} J_{n-1} - \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} J_n \\
&= \frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!} \left((2n)(2n-1)J_{n-1} - 4n^2 J_n\right) \\
&= \frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!} 2 \left(n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n\right) \\
&= \frac{2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!} W_{2n} \\
&= \frac{2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!} \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \text{ par la question 4.} \\
&\boxed{= \frac{\pi}{4n^2}.}
\end{aligned}$$

13. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\dfrac{\pi}{4} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = J_0 - K_n$.

Correction

On en déduit alors que

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^{n} K_{k-1} - K_k \\
&= K_0 - K_n \text{ par télescopage} \\
&\boxed{= J_0 - K_n.}
\end{aligned}$$

14. Illustrer **graphiquement** (on ne demande pas de preuve) que pour tout t de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2}{\pi} t \leqslant \sin(t)$, puis démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi^2}{4(2n+1)}.$$

Correction

On a déjà fait le graphe dans le chapitre 4 :)
Ensuite, on remarque que pour t dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,

$$0 \leqslant t^2 \cos(t)^{2n} \leqslant \frac{\pi^2}{4} \sin(t)^2 \cos(t)^{2n} \leqslant \frac{\pi^2}{4} \sin(t) \cos(t)^{2n},$$

ce qui, en intégrant entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$, entraîne que

$$0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cos(t)^{2n} dt = \frac{\pi^2}{4} \left[-\frac{1}{2n+1} \cos(t)^{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4(2n+1)}.$$

15. En utilisant l'équivalent de Stirling, démontrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6}$.

Correction

On sait que

$$\begin{aligned} K_n &= \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} J_n \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} 4^n \frac{2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{2\pi 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}} J_n \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} 4^n \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} J_n \\ &\boxed{\underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\pi n} J_n.} \end{aligned}$$

Mais

$$0 \leqslant \sqrt{\pi n} J_n \leqslant \sqrt{\pi n} \frac{\pi^2}{4(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui assure que $J_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par encadrement. Ainsi,

$$\frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} J_0 = \frac{\pi^3}{24},$$

ce qui assure que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{4}{\pi}\frac{\pi^3}{24} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

Problème 2. Densité d'une partie de $\mathbb{N}$

Pour être sûr que vous lisez bien tout le DS avant de vous lancer, je vous demande d'écrire, en début de copie (pas tout en haut de la copie, mais là où vous commenceriez à répondre aux questions), « Bonne fête monsieur ! ». Je mettrai un point sur le barème.

Le but de ce problème est de s'intéresser à la notion de densité d'une partie de $\mathbb{N}$. On rappelle que le cardinal d'une partie finie E, noté $\mathrm{Card}(E)$, est son nombre d'éléments. On précise que

- si $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et $a \leqslant b$, $\mathrm{Card}([\![a, b]\!]) = b - a + 1$,
- si $A \subset B$ et B est une partie finie de $\mathbb{N}$, alors A est une partie finie de $\mathbb{N}$ et $\mathrm{Card}(A) \leqslant \mathrm{Card}(B)$,
- si $A \subset B$, $\mathrm{Card}(B \setminus A) = \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A)$.

La densité d'une partie $A \subset \mathbb{N}$ est, quand elle existe, la limite

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathrm{Card}(A \cap [\![1, n]\!])$$

En d'autres termes, si u_n désigne le nombre d'éléments non nuls de A inférieurs ou égaux à n, $\delta(A) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n}$.

A. Généralités et quelques exemples

1. Justifier que la densité d'une partie de $\mathbb{N}$, si elle existe, est un réel de l'intervalle $[0, 1]$.

Correction

Soit A une partie de $\mathbb{N}$, soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $A \cap [\![1, n]\!] \subset [\![1, n]\!]$, donc

$$\operatorname{Card}(A \cap [\![1, n]\!]) \leqslant \operatorname{Card}([\![1, n]\!]) = n,$$

donc

$$\frac{\operatorname{Card}(A \cap [\![1, n]\!])}{n} \leqslant 1,$$

soit, en passant à la limite (qui existe car on a supposé A ayant une densité), $\delta(A) \leqslant 1$.

2. Quelle est la densité d'une partie finie de $\mathbb{N}$?

Correction

Soit A une partie finie de $\mathbb{N}$, a son cardinal. Alors pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \frac{\operatorname{Card}(A \cap [\![1, n]\!])}{n} \leqslant \frac{a}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc A admet une densité et $\delta(A) = 0$.

3. Soit A une partie admettant une densité égale à d. Démontrer que $\mathbb{N} \setminus A$ possède une densité, que l'on précisera.

Correction

On remarque simplement que si $u_n = \dfrac{\operatorname{Card}(A \cap [\![1, n]\!])}{n}$, alors $1 - u_n = \dfrac{n - \operatorname{Card}(A \cap [\![1, n]\!])}{n} = \dfrac{\operatorname{Card}(\mathbb{N} \setminus A) \cap [\![1, n]\!]}{n}$, donc

$$\frac{\operatorname{Card}(\mathbb{N} \setminus A) \cap [\![1, n]\!]}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - d,$$

c'est-à-dire que $\mathbb{N} \setminus A$ a une densité de $1 - d$.

4. On considère $D = \{10^k,\ k \in \mathbb{N}\}$. Déterminer la densité de D. A-t-on, pour toute partie A de $\mathbb{N}^*$, $\delta(A) = 0 \Rightarrow A$ est fini ?

Correction

On remarque que si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $10^k \leqslant n \Leftrightarrow k \leqslant \log_{10}(n)$. Ainsi,

$$\operatorname{Card}(D \cap [\![1, n]\!]) = \lfloor \log_{10}(n) \rfloor .$$

Donc

$$\frac{\operatorname{Card}(D \cap [\![1, n]\!])}{n} = \frac{\lfloor \log_{10}(n) \rfloor}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

par croissances comparées. Donc $\delta(D) = 0$, alors que, pourtant, D est infini !

B. Densité de certains ensembles arithmétiques

5. Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer la densité de l'ensemble $p\mathbb{N} = \{kp, k \in \mathbb{N}\}$.

Correction

On remarque simplement que l'ensemble des multiples de p dans $[\![1, n]\!]$ est $p, 2p, \dots, jp$, où j est tel que $jp \leqslant n < (j+1)p$. Ainsi, $j = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$. On en déduit que

$$\frac{\mathrm{Card}(p\mathbb{N} \cap [\![1, n]\!])}{n} = \frac{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor}{n}.$$

Or,

$$\frac{n}{p} - 1 \leqslant \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \leqslant \frac{n}{p},$$

donc

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{n} \leqslant \frac{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor}{n} \leqslant \frac{1}{p},$$

donc, par théorème d'encadrement, $\frac{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{p}$.

Ceci permet de dire que $\delta(p\mathbb{N}) = \frac{1}{p}$.

Soient a et b deux entiers positifs premiers entre eux. On pose $E_{a,b} = \{au + bv,\ (u, v) \in \mathbb{N}^2\}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

6. Démontrer qu'il existe $(r, s) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $ar + bs = n$. Déterminer, en fonction de (r, s), l'ensemble des couples (u, v) dans $\mathbb{Z}$ tels que $au + bv = n$.

Correction

Comme a et b sont premiers entre eux, par le théorème de Bézout, on dispose de $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $au_0 + bv_0 = 1$. En posant $r = u_0 n$ et $s = v_0 n$, on a le résultat.
Soit ensuite $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$.
Analyse. Si $au + bv = n$, alors $au + bv = ar + bs$, donc $a(u - r) = b(s - v)$. Ainsi, b divise $a(u - r)$ mais a est premier avec b donc b divise $u - r$: $u = r + kb$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Mais alors $akb = b(s - v)$, donc $ak = (s - v)$, donc $v = s - ak$. Ainsi, $(u, v) = (r + kb, s - ak)$.
Synthèse. Réciproquement, si $(u, v) = (r + kb, s - ak)$, alors $au + bv = n$.
L'ensemble des solutions est donc $\{(r + kb, s - ak),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

7. En déduire que si $n \geqslant ab$, alors il existe $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $ax + by = n$.

Correction

Si a ou b est nul, alors l'autre est égal à 1, ce qui rend tout évident (si $a = 0$, $b = 1$, donc $n = bn$).
On suppose a et b non nuls.
Si la solution particulière (r, s) trouvée est déjà dans $\mathbb{N}^2$, c'est gagné.
Sinon, la question est de savoir s'il existe k tel que $r + kb \geqslant 0$ et $s - ak \geqslant 0$.Il faut

alors que k satisfasse $k \geqslant -\frac{r}{b}$ et $k \leqslant \frac{s}{a}$. Or,

$$\frac{s}{a} - \left(-\frac{r}{b}\right) = \frac{sb + ar}{ab} = \frac{n}{ab} \geqslant 1,$$

donc déjà, $-\frac{r}{b} \leqslant \frac{s}{a}$ et, de par sa taille, l'intervalle $\left[-\frac{r}{b}, \frac{s}{a}\right]$ contient au moins un entier ! Notons k un entier de $\left[-\frac{r}{b}, \frac{s}{a}\right]$. Alors $r+bk \geqslant 0$, $s-ak \geqslant 0$, et $a(r+bk)+b(s-ak) = n$, d'où le résultat désiré !

8. En déduire $\delta(E_{a,b})$.

Correction

On en déduit que $\mathbb{N} \setminus E_{a,b}$ est fini, donc $\delta(\mathbb{N} \setminus E_{a,b}) = 0$ par la question 2.. Ainsi,

$$\delta(E_{a,b}) = 1 - \delta(\mathbb{N} \setminus E_{a,b}) = 1,$$

par la question 3..

C. Théorème de raréfaction des nombres premiers

On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Si $n \in \mathbb{N}$, on note

- $\pi(n)$ le nombre de premiers inférieurs ou égaux à n,
- α_n le produit de tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à n : $\alpha_n = \prod_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} p$.

9. Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que $\binom{2m+1}{m} \leqslant 4^m$.

Correction

Démontrons le résultat par récurrence sur m.
L'**initialisation** est évidente : $\binom{2 \times 0 + 1}{0} = 1 \leqslant 4^0$.

Pour l'**hérédité**, soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $\binom{2m+1}{m} \leqslant 4^m$. Alors

$$\begin{aligned}
\binom{2(m+1)+1}{m+1} &= \binom{2m+3}{m+1} \\
&= \frac{2m+3}{m+1}\binom{2m+2}{m} \\
&= \frac{2m+3}{m+1}\frac{(2m+2)!}{m!(m+2)!} \\
&= \frac{2m+3}{m+1} \times \frac{2m+2}{m+2}\frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!} \\
&= \frac{2m+3}{m+2} \times 2 \times \binom{2m+1}{m} \\
&\leqslant \frac{2m+4}{m+2} \times 2\binom{2m+1}{m} \\
&\leqslant 4 \times 4^m \text{ par hypothèse de récurrence,}
\end{aligned}$$

d'où l'hérédité, et le résultat.

10. Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{P}$ vérifiant $m+1 < p \leqslant 2m+1$, p divise $\binom{2m+1}{m}$.

En déduire que $\prod\limits_{\substack{m+1<p\leqslant 2m+1 \\ p \text{ premier}}} p \leqslant 4^m$.

Correction

On sait que $m!(m+1)!\binom{2m+1}{m} = (2m+1)!$. Soit p premier tel que $m+1 < p \leqslant 2m+1$. Alors $p > m+1$ donc p ne divise pas $m!(m+1)!$, donc p est premier avec $m!(m+1)!$.

De plus, $p \leqslant 2m+1$ donc p divise $(2m+1)! = m!(m+1)!\binom{2m+1}{m}$.

Par le théorème de Gauss, p divise $\binom{2m+1}{m}$.

Or, si p et q sont deux nombres premiers distincts divisant un entier a, alors pq divise a. Par conséquent, $\prod\limits_{\substack{m+1<p\leqslant 2m+1 \\ p \text{ premier}}}$ divise $\binom{2m+1}{m} \neq 0$, donc

$$\prod_{\substack{m+1<p\leqslant 2m+1 \\ p \text{ premier}}} \leqslant \binom{2m+1}{m} \leqslant 4^m.$$

11. En déduireque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \leqslant 4^n$.

Correction

Comme préconisé, démontrons le résultat par récurrence forte sur n.
L'initialisation, pour $n = 0$, est évidente : $\alpha_n = 1 \leqslant 4^0$.
Pour l'hérédité, soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la proposition soit vraie jusqu'au rang $n-1$. Alors

- si n est impair, $n = 2m+1$, alors on écrit que
$$\alpha_n = \alpha_m \times \prod_{\substack{m+1<p\leqslant 2m+1\\ p \text{ premier}}} \leqslant 4^m \times 4^m \leqslant 4^{2m} \leqslant 4^{2m+1}$$
- si n est pair, on écrit $n = 2m+2$ (comme $n \neq 0$, on peut écrire un nombre pair sous cette forme !). Mais $2m+2$ n'est pas premier, donc $\alpha_{2m+2} = \alpha_{2m+1} = \alpha_{n-1}$. Ainsi $\alpha_n = \alpha_{n-1} \leqslant 4^{n-1} \leqslant 4^n$.

D'où l'hérédité, et le résultat par récurrence forte.

12. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, pour tout $m \in [\![2, n]\!]$, $m^{\pi(n)-\pi(m)} \leqslant 4^n$ et en déduire que
$$\pi(n) \leqslant \frac{n\ln 4}{\ln m} + \pi(m).$$

Correction

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ $2 \leqslant m \leqslant n$ tels que $2 \leqslant m \leqslant n$. Comme $\alpha_n \leqslant 4^n$, on en déduit, a fortiori, que
$$\prod_{\substack{m\leqslant p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} p \leqslant 4^n.$$
Mais
$$\prod_{\substack{m\leqslant p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} p \geqslant \prod_{\substack{m\leqslant p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} m = m^{\pi(n)-\pi(m)}.$$
Donc $m^{\pi(n)-\pi(m)} \leqslant 4^n$, d'où, en passant au ln,
$$(\pi(n) - \pi(m))\ln(m) \leqslant n\ln(4),$$
i.e. $\pi(n) \leqslant \dfrac{n\ln 4}{\ln m} + \pi(m)$.

13. Déterminer alors la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $\dfrac{\pi(n)}{n}$ et en déduire $\delta(\mathbb{P})$.

Correction

Cela fait penser à l'exercice fait en classe $u_n \leqslant \dfrac{k}{n} + \dfrac{1}{k}$. Procédons de même ! On sait que pour tous n et m tels que $2 \leqslant m \leqslant n$,
$$\frac{\pi}{n} \leqslant \frac{\ln(4)}{\ln(m)} + \frac{\pi(m)}{n}.$$
Soit $\varepsilon > 0$. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{\ln(4)}{\ln(m)} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tell que $N \geqslant m$ et $\dfrac{\pi(m)}{N} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Alors pour tout $n \geqslant N$, on a $0 \leqslant \dfrac{\pi(n)}{n} \leqslant \varepsilon$.

Ceci signifie exactement que $\dfrac{\pi(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, $\delta(\mathbb{P}) = 0$. C'est le théorème de raréfaction des nombres premiers.

Hadamard et De la Vallée Poussin ont en fait démontré le théorème des nombres premiers :

$$\pi(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\ln(n)}$$

On admet ce théorème (démontrable en spé, mais c'est difficile !)

14. En quoi cela permet-il de retrouver la valeur de $\delta(\mathbb{P})$?

Correction

Si on sait que $\pi(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{\ln(n)}$, alors

$$\frac{\mathrm{Card}(\mathbb{P}\cap [\![1,n]\!])}{n} = \frac{\pi(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On retrouve ainsi que $\delta(\mathbb{P}) = 0$.

15. Notons p_n le n-ième nombre premier. Démontrer que $p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$.
On pourra déterminer une valeur évidente et un équivalent simple de $\pi(p_n)$.

Correction

On sait que $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\pi(p_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{p_n}{\ln(p_n)}$. Mais $\pi(p_n) = n$ (comme p_n est le n-ième nombre premier, il y a n nombres premiers inférieurs ou égaux à p_n). Ainsi,

$$\frac{p_n}{\ln(p_n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$$

Or, si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$. En effet,

$$\ln(u_n) = \ln\frac{u_n}{v_n} + \ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n),$$

car $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\ln\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Comme $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\dfrac{p_n}{\ln(p_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par croissances comparées. Ainsi,

$$\ln\left(\frac{p_n}{\ln(p_n)}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$

Mais,

$$\ln\left(\frac{p_n}{\ln(p_n)}\right) = \ln(p_n) - \ln(\ln(p_n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(p_n),$$

car $\ln(p_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\ln(\ln(p_n)) \underset{n\to+\infty}{=} o(\ln(p_n))$.