Chapitre 09
Limites de fonctions et continuité

Définition 1

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, $x \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que x est **adhérent** à A s'il $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.

Proposition 2

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si $x \in \mathbb{R}$, x est adhérent à A si et seulement si

$$\forall \eta > 0,\ \exists a \in A,\ |x - a| \leqslant \eta.$$

2. Si $x = +\infty$, x est adhérent à A si et seulement si

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists a \in A,\ a \geqslant M.$$

3. Si $x = -\infty$, x est adhérent à A si et seulement si

$$\forall m \in \mathbb{R},\ \exists a \in A,\ a \leqslant m.$$

Démonstration

On ne va pas démontrer l'équivalence, c'est un exercice ! (qui ressemble énormément à toutes les équivalences de la notion de densité !) ■

Remarque 3

Un cas particulier est à garder en tête ! Si I est un intervalle, un point adhérent à I, c'est simplement un point ou une borne (éventuellement infinie) de I.

Dans tout ce chapitre, on travaillera sur une partie U de $\mathbb{R}$, a priori quelconque, mais qui, en pratique, sera très souvent un intervalle.

1 Limites

1.1 Voisinages

Définition 4

Soit $V \subset \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si $a \in \mathbb{R}$, on dit que V est un voisinage de a s'il existe $\eta > 0$ tel que $[a-\eta, a+\eta] \subset V$.
2. Si $a = +\infty$, on dit que V est un voisinage de a s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $[M, +\infty[\subset V$.
3. Si $a = -\infty$, on dit que V est un voisinage de a s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty, m] \subset V$.

Exemple 5

1. Les fondamentaux :
   - $\forall \varepsilon > 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ est un voisinage de a.
   - $\forall a \in \mathbb{R}$, $[a, +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$ et $]-\infty, a]$ est un voisinage de $-\infty$.
2. $\mathbb{R}$ est un voisinage de tout point de $\mathbb{R}$.
3. $\mathbb{N}$ n'est un voisinage d'aucun point de $\mathbb{R}$, ni de $+\infty$, ni de $-\infty$.

Proposition 6

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, V et V' deux voisinages de a. Alors $V \cap V'$ est un voisinage de a.

Démonstration

- si $a \in \mathbb{R}$, on dispose de $\eta > 0$, de $\eta' > 0$ tels que $[a-\eta, a+\eta] \subset V$ et $[a-\eta', a+\eta'] \subset V'$. Alors si $\eta'' = \min(\eta, \eta')$, $[a-\eta'', a+\eta'']$ est une partie de V et de V', donc de $V \cap V'$. Donc $V \cap V'$ est un voisinage de a.
- si $a = +\infty$, on dispose de M et M' tels que $[M, +\infty[\subset V$ et $[M', +\infty[\subset V'$. En posant $M'' = \max(M, M')$, $[M'', +\infty[\subset V \cap V'$.
- on fait de même si $a = -\infty$.

$\blacksquare$

Définition 7

Soit $(\mathcal{P}(x))_{x\in\mathbb{R}}$ une proposition indexée sur $\mathbb{R}$. Si $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on dit que $\mathcal{P}(x)$ est vraie au voisinage de a s'il existe V un voisinage de a sur lequel $\mathcal{P}$ est vraie.

Proposition 8

Si A est une partie de $\mathbb{R}$, si x est adhérent à A et si V est un voisinage de x, alors $A \cap V \neq \emptyset$.

1.2 Définitions

Dans toute cette partie, D désigne une partie de $\mathbb{R}$ (y penser comme un intervalle).

Définition 9

Soit $f : D \to \mathbb{R}$, a un point adhérent à D et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a et on note $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ si pour tout voisinage V de ℓ, il existe D un voisinage de A tel que

$$\forall x \in D,\ x \in V \Rightarrow f(x) \in V.$$

Cette proposition est bien parce qu'elle est courte, mais il faut absolument l'expliciter !

Définition 10

Soit $f : D \to \mathbb{R}$, a un point adhérent à D et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

(i) Si $a \in \mathbb{R}$,

(a) si $\ell \in \mathbb{R}$,
$$\left(f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell\right) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,\ \forall x \in D, (|x-a| \leqslant \eta) \Rightarrow (|f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon)\right)$$

(b) si $\ell = +\infty$,
$$\left(f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty\right) \Leftrightarrow \left(\forall M > 0, \exists \eta > 0,\ \forall x \in D, (|x-a| \leqslant \eta) \Rightarrow (f(x) \geqslant M)\right)$$

(c) si $\ell = -\infty$,
$$\left(f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty\right) \Leftrightarrow \left(\forall m < 0, \exists \eta > 0,\ \forall x \in D, (|x-a| \leqslant \eta) \Rightarrow (f(x) \leqslant m)\right)$$

(ii) Si $a = +\infty$,

(a) si $\ell \in \mathbb{R}$,
$$\left(f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} \ell\right) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0,\ \forall x \in D, (x \geqslant B) \Rightarrow (|f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon)\right)$$

(b) si $\ell = +\infty$,
$$\left(f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty\right) \Leftrightarrow \left(\forall M > 0, \exists B > 0,\ \forall x \in D, (x \geqslant B) \Rightarrow (f(x) \geqslant M)\right)$$

(c) si $\ell = -\infty$,
$$\left(f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} -\infty\right) \Leftrightarrow \left(\forall m < 0, \exists B > 0,\ \forall x \in D, (x \geqslant B) \Rightarrow (f(x) \leqslant m)\right)$$

(iii) Si $a = -\infty$,

(a) si $\ell \in \mathbb{R}$,
$$\left(f(x) \underset{x\to -\infty}{\longrightarrow} \ell\right) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \exists b < 0,\ \forall x \in D, (x \leqslant b) \Rightarrow (|f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon)\right)$$

(b) si $\ell = +\infty$,
$$\left(f(x) \underset{x\to -\infty}{\longrightarrow} +\infty\right) \Leftrightarrow \left(\forall M > 0, \exists b < 0,\ \forall x \in D, (x \leqslant b) \Rightarrow (f(x) \geqslant M)\right)$$

(c) si $\ell = -\infty$,
$$\left(f(x) \underset{x\to -\infty}{\longrightarrow} -\infty\right) \Leftrightarrow \left(\forall m < 0, \exists b < 0,\ \forall x \in D, (x \leqslant b) \Rightarrow (f(x) \leqslant m)\right)$$

Remarque 11

Comme toujours, on peut remplacer $\forall \varepsilon > 0$ par $\forall \varepsilon \in]0, 1[$, remplacer $\forall M \in \mathbb{R}$ par $\forall M \geqslant 0$, $\forall M \geqslant 1$.

Exemple 12

Démontrer que $\dfrac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$. Ici $U = \mathbb{R}^*$.

Proposition 13

Soit $f : D \to \mathbb{R}$, a adhérent à D, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. La limite de f en a, si elle existe, est unique. On note $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$, ou bien $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

Démonstration

On étudie uniquement le cas où les limites sont réelles. Soient ℓ et ℓ' deux réels tels que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ et $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell'$.
On suppose $\ell < \ell'$ (sans perte de généralité).
Prenons $\varepsilon = \dfrac{\ell' - \ell}{3}$. Alors $\ell + \varepsilon < \ell' - \varepsilon$.
$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ donc on dispose de V voisinage de a tel que

$$\forall x \in D,\ x \in V \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell'$ donc on dispose de V' voisinage de a tel que

$$\forall x \in D,\ x \in V' \Rightarrow |f(x) - \ell'| \leqslant \varepsilon.$$

Alors $V \cap V'$ est un voisinage de a (en particulier, $V \cap V' \cap U \neq \emptyset$).
Soit alors $x \in V \cap V' \cap U$. On a donc

$$f(x) \leqslant \ell + \varepsilon < \ell' - \varepsilon \leqslant f(x).$$

ABSURDE ! D'où l'unicité. ■

Remarque 14

Il faut pouvoir expliciter la démonstration précédente sans voisinage.

Proposition 15

Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{R}$ adhérent à D. Si f admet une limite **finie** en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Démonstration

Soit $\ell = \lim_{x \to a} f(x)$. Prenons $\varepsilon = 1$. Alors on dispose d'un voisinage V de a tel que pour tout x dans $V \cap D$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$. Alors, pour tout x dans $V \cap D$,

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - \ell| + |\ell| \leqslant |\ell| + 1,$$

donc f est bien bornée au voisinage de a. ■

Une proposition toute bête, mais qui est importante... et qu'il faut garder en tête pour lorsque l'on définira la notion de continuité !

Proposition 16

Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$. Alors si f admet une limite ℓ en a, cette limite et finie et $f(a) = \ell$.

Démonstration

On sait que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$, donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors on dispose de $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in D,\ |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Prenons $x = a$. Alors $x \in U$ et $|x-a| = 0 \leqslant \eta$. Donc

$$|f(a) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

La proposition précédente est vraie pour tout ε. Si on avait $f(a) \neq \ell$, alors on aurait une contradiction en prenant $\varepsilon = \dfrac{|f(a) - \ell|}{2}$. ■

Une grosse différence avec les limites de suites est que l'on peut aussi parler de limites à gauche et à droite lorsqu'on manipule des fonctions.

Définition 17

Soit $f : D \to \mathbb{R}$, a un **réel** adhérent à D.

1. On dit que f est définie sur un voisinage à gauche (resp. à droite) de a s'il existe un voisinage V de a tel que $V \cap]-\infty, a[\subset D$ (resp. $V \cap]a, +\infty[\subset D$)

Soit $\ell \in \overline{R}$.

2. Si f est définie au voisinage à gauche de a, on dit que ℓ est une (en fait la) limite à gauche de a, et on note

$$f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x < a}}{\longrightarrow} \ell,\ f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} \ell,\ \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \ell,\ \lim_{x \to a^-} = \ell,$$

   si pour tout voisinage V de ℓ, il existe U voisinage de a tel que

$$\forall x \in D,\ (x \in U) \wedge (x < a) \Rightarrow f(x) \in V.$$

3. Si f est définie au voisinage à droite de a, on dit que ℓ est une (en fait la) limite à droite de a, et on note

$$f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x > a}}{\longrightarrow} \ell,\ f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} \ell,\ \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \ell,\ \lim_{x \to a^+} = \ell,$$

   si pour tout voisinage V de ℓ, il existe U voisinage de a tel que

$$\forall x \in D,\ (x \in U) \wedge (x > a) \Rightarrow f(x) \in V.$$

Remarque 18

1. On ne prouve pas ici l'unicité de la limite à droite.
2. Une fonction admettant une limite finie à gauche/à droite en un point est bornée au voisinage à gauche/à droite de ce point.
3. On ne reprécisera pas à chaque fois mais les propriétés que l'on va énoncer sur les limites (opérations, encadrements, etc.) seront bien sûr valables pour les limites à gauche/à

droite.

4. Il faut pouvoir adapter les définitions des limites à gauche et à droite avec des $\varepsilon/M/m/\eta$.

Proposition 19

Soit $f : D \to \mathbb{R}$, a un réel adhérent à D, $\ell \in \overline{R}$.

1. si $a \in D$, alors f admet la limite ℓ en a si, et seulement si
$$\left(\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell\right) \text{ et } \left(\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell\right) \text{ et } f(a) = \ell.$$
2. si $a \notin D$, alors f admet la limite ℓ en a si, et seulement si
$$\left(\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell\right) \text{ et } \left(\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell\right).$$

Démonstration

1. $\boxed{\Rightarrow}$ Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, déjà, on a vu que $f(a) = \ell$.
Ensuite, soit $\varepsilon > 0$. Par convergence, on sait que l'on dispose de $\eta > 0$ tel que
$$\forall x \in D,\ |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$
Donc
$$\forall x \in D,\ |x-a| \leqslant \eta \text{ et } x < a \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$
et
$$\forall x \in D,\ |x-a| \leqslant \eta \text{ et } x > a \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$
Donc $f(x) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} \ell$ et $f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} \ell$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Si $f(x) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} \ell$, $f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} \ell$ et $f(a) = \ell$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Par la première limite, on dispose de $\eta > 0$ tel que
$$\forall x \in D,\ |x-a| \leqslant \eta \text{ et } x < a \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$
Par la seconde limite, on dispose de $\eta' > 0$ tel que
$$\forall x \in D,\ |x-a| \leqslant \eta' \text{ et } x > a \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$
Posons $\eta'' = \min(\eta, \eta')$.
2. On adapte dans le cas où $a \notin D$.

■

Exemple 20

Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x}{(x-1)^2}$.

Déterminer les limites à droite et à gauche de $\lfloor 2x \rfloor$ quand x tend vers $\dfrac{1}{2}$.

On va essayer maintenant de réutiliser ce qui a été fait sur les suites : c'est la *caractérisation séquentielle* des limites :

Proposition 21

Soit $f : D \to \mathbb{R}$, a point adhérent à D, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors f admet une limite ℓ en a si, et seulement si
$$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}, \left(\lim_{n\to+\infty} u_n = a\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell\right).$$

Démonstration

On ne traite que le cas où a et ℓ sont dans $\mathbb{R}$ (on ne fait pas les autres cas, ils sont pour vous !)

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Alors on dispose de $\eta > 0$ tel que $\forall x \in D,\ |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$.
Or, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ donc on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $|u_n - a| \leqslant \eta$.
Soit $n \geqslant N$. Alors $|u_n - a| \leqslant \eta$, donc $|f(u_n) - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Donc $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

$\boxed{\Leftarrow}$ On raisonne par contraposée. On suppose que f ne tend pas vers ℓ quand x tend vers a. Alors on dispose de ε tel que
$$\forall \eta > 0,\ \exists x \in D,\ |x-a| \leqslant \eta \text{ et } |f(x)-\ell| > \varepsilon.$$
On construit alors une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convrge vers a et telle que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers ℓ.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Prenons $\eta = \dfrac{1}{2^n}$. Alors on dispose de $x_n \in D$ tel que $|x_n - a| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ et $|f(x_n) - \ell| > \varepsilon$.
On a alors construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $|x_n - a| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, i.e. $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, mais $|f(x_n) - \ell| > \varepsilon$, donc $f(x_n)$ ne converge pas vers ℓ.

■

Remarque 22

1. Cette caractérisation sert à montrer que des fonctions n'ont pas de limite. Par exemple, montrons que $x \mapsto \sin \dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.
2. La caractérisation séquentielle fonctionne aussi pour des limites à gauche et à droite : on remplace « $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ » par « $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n < a$ » (si l'on regarde à gauche).

1.3 Théorèmes liés aux limites

Proposition 23 (Opérations sur les limites)

1. Règles sur les limites (cf. suites).
2. Soit $f : D \to E$, $g : E \to \mathbb{R}$, a un point adhérent à D, b un point adhérent à E, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Démonstration. On ne va seulement prouver la composition.

- Preuve avec des voisinages. Soit W un voisinage de ℓ. Comme $g(y) \underset{y\to b}{\longrightarrow} \ell$, on dispose de V voisinage de b tel que $\forall y \in E,\ y \in V \Rightarrow g(y) \in W$.
  Comme $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$, on dispose de U voisinage de U tel que $\forall x \in D,\ x \in U \Rightarrow f(x) \in V$.
  Soit $x \in D \cap U$. Alors $f(x) \in V$, donc $g(f(x)) \in W$.
- Preuve sans voisinage, avec des ε et des η. On suppose a, b et ℓ finis.
  Soit $\varepsilon > 0$. Comme $g(y) \underset{y\to b}{\longrightarrow} \ell$, on dispose de $\eta > 0$ tel que
  $$\forall y \in E,\ |y-b| \leqslant \eta \Rightarrow |g(y)-b| \leqslant \varepsilon.$$
  Mais comme $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$, on dispose de $\xi > 0$ tel que
  $$\forall x \in D,\ |x-a| \leqslant \xi \Rightarrow |f(x)-b| \leqslant \eta.$$
  Soit $x \in D$ tel que $|x-a| \leqslant \xi$. Alors $|f(x)-b| \leqslant \eta$.
  Donc $|g(f(x))-\ell| \leqslant \varepsilon$.

□

Proposition 24 (limites et inégalités)

Soit $f : D \to \mathbb{R}$, qui admet une limite finie ℓ en a adhérent à D, m et M deux réels.

(i) Si $\ell < M$, alors il existe un voisinage de a sur lequel f est strictement majorée par M.

(ii) Si $\ell > m$, alors il existe un voisinage de a sur lequel f est strictement minorée par m.

Proposition 25

Soient $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$, a un point adhérent à D. On suppose que f et g ont une limite finie en a.

1. S'il existe un voisinage V de a tel que
$$\forall x \in V, f(x) \leqslant g(x),$$
alors
$$\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x).$$

Remarque 26

Attention, cela ne passe pas aux inégalités strictes !

Proposition 27 (Théorèmes d'encadrement)

Soit f, u, v trois fonctions de $\mathbb{R}^D$, a un point adhérent à D, $\ell \in \mathbb{R}$.

(i) Si $\lim_{x\to a} u(x) = +\infty$ et s'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in V, u(x) \leqslant f(x)$, alors f admet une limite en a et $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.

(ii) Si $\lim_{x\to a} v(x) = -\infty$ et s'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in V, f(x) \leqslant v(x)$, alors f admet une limite en a et $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

(iii) Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = \lim\limits_{x\to a} v(x) = \ell$ et s'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in V, u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$, alors f admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Théorème 28 (Théorème de la limite monotone)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $f :]a, b[\to \mathbb{R}$, monotone.

1. f admet une limite en tout point c de $]a, b[$. De plus,
   - si f est croissante, $\lim\limits_{x\to c^-} \leqslant f(c) \leqslant \lim\limits_{x\to c^+} f(x)$.
   - si f est décroissante, $\lim\limits_{x\to c^-} \geqslant f(c) \geqslant \lim\limits_{x\to c^+} f(x)$.
2. Si f est croissante, alors
   - en b,
     - si f est majorée, alors f a une limite en b,
     - sinon $f(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} +\infty$.
   - en a,
     - si f est minorée, alors f a une limite en a,
     - sinon $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$.
3. Si f est décroissante, on inverse.
4. La proposition fonctionne de la même manière si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.

Démonstration

On se place uniquement dans le cas croissant.

1. Soit $c \in]a, b[$.
   Notons $A = \{f(x), a < x < c\}$.
   A est non vide et $\forall x \in]a, c[,\ f(x) \leqslant f(c)$ par croissance de f.
   Donc A est majorée.
   Donc A admet une borne supérieure ℓ, qui vérifie $\ell \leqslant f(c)$.
   Montrons que $f(x) \underset{x\to c^-}{\longrightarrow} \ell$.
   Soit $\varepsilon > 0$.
   $\ell = \sup(A)$ donc on dispose de $y \in A$ tel que $\ell - \varepsilon \leqslant y \leqslant \ell$.
   Or, $y \in A$ donc on dispose de $x_0 \in]a, c[$ tel que $y = f(x_0)$.
   Posons $\eta = c - x_0 > 0$.
   Soit $x \in]a, c[$ tel que $|x - c| \leqslant \eta$.
   Alors $c - \eta \leqslant x \leqslant c$, i.e. $x_0 \leqslant x$.
   Donc $f(x_0) \leqslant f(x)$.
   Comme $f(x_0) \geqslant \ell - \varepsilon$ et $f(x) \leqslant \ell$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.
   On fait de même en c^+.
2. Pour les bornes, on regarde en b. Notons $A = \{f(x), x \in]a, b[\}$.
   - si f est majorée sur $]a, b[$, A est majorée, non vide, donc admet une borne supérieure ℓ.
     En adaptant la preuve de ce qui se passe en c^-, on obtient le résultat.
   - si f n'est pas majorée, on montre que $f(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} +\infty$.
     Soit $M \in \mathbb{R}$.
     A né st pas majorée donc on dispose de $y \in A$ tel que $y \geqslant M$, i.e. on dispose de

$x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) \geqslant M$.
Posons $\eta = b - x_0 > 0$.
Soit $x \in]a, b[$ tel que $|x - b| \leqslant \eta$.
Alors $x \geqslant b - \eta = x_0$, donc $f(x) \geqslant g(x_0) \geqslant M$.
Donc $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} +\infty$.

■

1.4 Extension au monde complexe

On étend les limites de fonctions pour des fonctions à valeurs complexes, comme on l'a fait pour les suites.

Remarque 29

Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, on peut aussi dire que $f(z) \underset{z \to a}{\longrightarrow} \ell$, avec a et ℓ dans $\mathbb{C}$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall z \in \mathbb{C},\ |z - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(z) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

1.5 Un peu d'analyse asymptotique

On va simplement adapter les définitions vues sur les suites !

Définition 30

Soit $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$, a un point adhérent à I, $(f, g) : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$.

1. si g ne s'annule pas sur un voisinage de a,

(a) On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a ou que $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ quand $x \to a$, ou que « $f(x)$ est un petit o de $g(x)$ quand x tend vers a », et on écrit $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

(b) On dit que f est dominée par g au voisinage de a ou que $f(x)$ est dominée par $g(x)$ quand x tend vers a, ou encore que « $f(x)$ est un grand O de $g(x)$ quand x tend vers a », et on note $f(x) \underset{x \to a}{=} O(g(x))$ si $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage de a.

(c) On dit que f est équivalente à g au voisinage de a, ou que $f(x)$ est équivalent à $g(x)$ quand x tend vers a, et on écrit $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$.

2. Cas général.

On dit que $\begin{cases} f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x)) \\ f(x) \underset{x \to a}{=} O(g(x)) \\ f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \end{cases}$ s'il existe $h : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = g(x)h(x)$ au voisinage de a, et $\begin{cases} h(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0 \\ h \text{ est bornée au voisinage de } a. \\ h(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1 \end{cases}$

Remarque 31

1. $f(x) \underset{x\to a}{\sim} 0$ si et seulement si f est nulle au voisinage de a.
2. Attention au point a ! En effet,
   - $\dfrac{x^2}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $x^2 \underset{x\to 0}{=} o(x)$
   - $\dfrac{x^2}{x} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $x \underset{x\to +\infty}{=} o(x^2)$
   - $\dfrac{x^2}{x} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 1$ donc $x^2 \underset{x\to 1}{\sim} x$.

On a les mêmes propriétés usuelles que sur les suites. Rappelons-en quelques unes.
On a de plus les équivalents et prépondérances classiques.

Proposition 32 (Prépondérances classiques – croissances comparées)

1. Si $a < b$, $x^a \underset{x\to +\infty}{=} o(x^b)$,
2. Si $a < b$, $x^b \underset{x\to 0}{=} o(x^b)$,
3. Si $0 < a < b$, $a^x \underset{x\to\infty}{=} b^x$,
4. (croissances comparées) Si $a, b > 0$,
$$\ln(x)^a \underset{x\to+\infty}{=} o(x^b),\ x^a \underset{x\to+\infty}{=} o(\mathrm{e}^{bx}),\ \ln(x)^a \underset{x\to 0}{=} o(x^{-b}),$$
5. (prépondérances classiques avec les factorielles) Si $x > 0$,
$$x^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!) \text{ et } n! \underset{n\to+\infty}{=} n^n.$$

Proposition 33 (Équivalents célèbres)

Tous les équivalents de cette proposition sont pris en 0.

1. $\sin(x) \sim x$
2. $1 - \cos(x) \sim \dfrac{x^2}{2}$
3. $\tan(x) \sim x$
4. $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$
5. $\mathrm{e}^x - 1 \sim x$
6. $\ln(1+x) \sim x$
7. $\mathrm{Arcsin}(x) \sim x$
8. $\mathrm{Arctan}(x) \sim x$

Deux propriétés sont à redire particulièrement :

Proposition 34 (Composition d'équivalents)

- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} g(u_n)$.
- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $h(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} a$, alors $f\circ h(x) \underset{x\to b}{\sim} g\circ h(x)$.

Remarque 35

- En d'autres termes, on peut composer les équivalents **à droite**.
- On ne peut en revanche **PAS** les composer à gauche.

2 Continuité

2.1 Définition, aspects locaux

Définition 36

Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$.

1. On dit que f est continue en a si l'une des trois définitions équivalentes est vérifiée :
   - $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$,
   - $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon$,
   - f a une limite en a.
2. f est continue sur D si elle est continue en tout point de D, i.e.
$$\forall a \in D,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon$$
3. f est continue à droite en a (resp. à gauche) si $f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} f(a)$ (resp. a^-)
4. On note $\mathscr{C}(D,\mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}^0(D,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de D dans $\mathbb{R}$.

Exemple 37

1. Si $E : \left|\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto \lfloor x \rfloor\end{array}\right.$, E est continue en tout point de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, mais n'est continue en aucun entier (en revanche, elle est continue à droite en tous les entiers).
2. Si
$$f : \left|\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0\\ 0 \text{ si } x = 0\end{cases}\end{array}\right.$$
on montre que f est continue en 0.

Étant données les définitions que nous avons vues de la notion de limite,

Proposition 38 (Caractérisation séquentielle de la continuité)

Soit $f : D \to \mathbb{R}$, a un point de D. f est continue en a si, et seulement si

$$\forall (u_n) \text{ telle que } u_n \longrightarrow_{n\to+\infty} a,\ f(u_n) \longrightarrow_{n\to+\infty} f(a).$$

Exemple 39

1. Démontrons que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

- si $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on pose $u_n = \dfrac{\lfloor 10^n a \rfloor}{10^n}$. Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(u_n) = 1$, donc
$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \neq \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(a),$$
donc $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue en a.
- si $a \in Q$, on pose, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = a + \dfrac{\sqrt{2}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, et pourtant,
$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(u_n) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \neq \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(a).$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue, telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$. Montrons que f est linéaire.

(a) $f(0) = f(0) + f(0)$ donc $f(0) = 0$.

(b) On montre par récurrence immédiate que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(nx) = nf(x)$.

(c) On montre que pour tout n dans $\mathbb{Z}$ et pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$

- si $n \in \mathbb{N}$, c'est gagné.
- sinon, $f(nx - nx) = 0$ et $f(nx - nx) = f(nx) + f(-nx)$. Donc $f(nx) = -f(-nx)$. Comme $-n \in \mathbb{N}$, $f(-nx) = -nf(x)$, donc $f(nx) = nf(x)$.

En particulier, pour tout n dans $\mathbb{Z}$, $f(n) = nf(1)$.

(d) On montre que $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = xf(1)$.
Soit $x \in \mathbb{Q}$, $x = \dfrac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Alors
$$f(qx) = qf(x) \text{ et } f(qx) = f(p) = pf(1),$$
Donc $f(x) = \dfrac{p}{q} f(1)$.

3. On montre que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = xf(1)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on dispose de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
Alors, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $f(u_n) = u_n f(1)$ car $u_n \in \mathbb{Q}$.
Or, $u_n f(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} xf(1)$.
De plus, **par continuité de** f, $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.
Par unicité de la limite, $f(x) = xf(1)$, d'où le résultat désiré !

Proposition 40 (Théorèmes généraux)

Soit $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonction continues en un point a de I, λ et μ deux réels. Alors

1. $\lambda f + \mu g$ est continue en a.
2. fg est continue en a.
3. si g ne s'annule pas sur un voisinage de a, $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.
4. si h est une fonction définie sur un voisinage de $f(a)$ et continue en $f(a)$, $h \circ f$ est continue en a.

Point de méthode 41

Si l'on veut démontrer la continuité d'une fonction f sur D, on repère les points problématiques, et, pour les autres, on dit « par théorèmes généraux » .
Exemple. Si

$$f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Alors

- f est continue en 0 par l'exemple fait précédemment,
- f est continue sur $\mathbb{R}^*$ par les théorèmes généraux,

donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Ce dernier exemple appelle une définition, celle du prolongement par continuité.

Proposition 42

(et def) Soit I un **intervalle**. Soit a un point de I, $f : I\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que f admette la même limite ℓ à gauche et à droite de a. On dit alors que f est prolongeable par continuité en a, et la fonction

$$\overline{f} : x \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in I\backslash\{a\}, \\ \ell \text{ si } x = a, \end{cases}$$

est continue et est appelée prolongement par continuité de f en a.

Remarque 43

On pourrait retirer l'hypothèse « f continue sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$ » mais, en pratique, on fait toujours un prolongement par continuité d'une fonction continue !

Exemple 44

1. L'exemple fait précédemment.
2. Si $h : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \end{array} \right.$, étudier la possibilité d'un prolongement par continuité de h.

Certaines fonctions, cependant, ne sont pas prolongeables par continuité : prendre la fonction partie entière par exemple. On définit alors la notion de fonction continue par morceaux.

Définition 45

1. Soit $[a, b]$ un segment, f définie sur $[a, b]$. f est dite continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe un entier n, $n+1$ points $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ tels que pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$, $f_{|]a_k, a_{k+1}[}$ est continue sur $]a_k, a_{k+1}[$ et prolongeable par continuité en a_k et a_{k+1}.
(i.e. si cette restriction a des limites finies en a_k et a_{k+1})
2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. On dit que f est continue par morceaux sur I si elle est continue par morceaux sur chaque segment de I.
3. On note $\mathscr{C}_{\mathrm{pm}}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}_m(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions cpm de I dans $\mathbb{R}$.

Exemple 46

1. La partie entière est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction
$$\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \tan(x) \text{ si } x \neq \dfrac{\pi}{2}[\pi] \\ \quad 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$
n'est **pas** continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, car elle n'a pas de limite finie à droite et à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$.

3 Aspects globaux

3.1 Surjectivité et TVI

Dans tout le chapitre, I désigne un **intervalle**.

Théorème 47 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction continue sur l'intervalle I, $a < b$ deux points de I. Alors pour tout réel M entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe x dans $[a, b]$ tel que $y = f(x)$.

Démonstration

On va donner deux preuves, les deux arguments sont importants à connaître.

1. Preuve de Bolzano, par borne supérieure. On suppose, sans perte de généralité, que $f(a) < M < f(b)$ (on met même des inégalités strictes car s'il y a égalité, le résultat est démontré). Considérons
$$A = \{x \in [a, b],\ f(x) \leqslant M\}.$$
Alors A est une partie non vide ($a \in A$), majorée (par b) de $\mathbb{R}$, donc admet une borne supérieure $c \in [a, b]$. Démontrons que $f(c) = M$.
   - Comme $c = \sup(A)$, alors on dispose d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} c$. Or, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $f(u_n) \leqslant M$ donc, par continuité de f et passage

à la limite dans les inégalités, $f(c) \leqslant M$.

- Ensuite, $\forall x \in]c, b]$, $f(x) > M$ (car $x \notin A$). Or, comme $c = inf(]c, b])$, on dispose de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $]c, b]$ telle que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} c$ (prendre $c + \frac{1}{n}$ par exemple, qui est bien dans $]c, b]$ à partir d'un certain rang). Mais alors $f(v_n) > M$ donc par continuité de f et passage à la limite dans les inégalités, $f(c) \geqslant M$.

Donc $f(c) = M$, d'où le résultat !

■

Remarque 48

1. On n'a pas besoin de monotonie !
2. Une formulation rapide et importante du TVI est « l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle » .
   En effet, $f(\mathrm{I})$ intervalle
   $\Leftrightarrow \forall (y, z) \in f(\mathrm{I})^2,\ y < z,\ [y, z] \subset f(\mathrm{I})$.
   C'est exactement le TVI.
3. On peut aussi le résumer en « une fonction continue qui change de signe s'annule » .

Proposition 49 (TVI aux limites)

Soient a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ continue.
Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ et $f(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} \ell'$, si M est un réel compris strictement entre ℓ et ℓ', alors il existe c dans $]a, b[$ tel que $f(c) = M$.

Démonstration

Idée de la démo : si $\ell < M < \ell'$, alors il existe x_0 dans $\mathbb{R}$ tel que $f(x_0) < M$ et x_1 dans $\mathbb{R}$ tel que $f(x_1) > M$. ■

Exercice 50

Démontrer que tout polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle et est surjectif sur $\mathbb{R}$.

On l'a vu, le TVI donne de bons résultats de surjectivité. Que faut-il pour avoir de l'injectivité ?

3.2 Injectivité et monotonie

Proposition 51

Une fonction strictement monotone sur un intervalle est injective.

Démonstration

Déjà faite dans le chapitre 5. ■

Proposition 52

Une fonction continue et injective sur un intervalle est strictement monotone.

Démonstration

1. Preuve « patate ». Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ n'est pas strictement monotone, alors il existe $(a, b, c) \in \mathrm{I}^3$ tels que $a < b < c$ et
$$f(a) \leqslant f(b) \text{ et } f(c) \leqslant f(b)$$
OU
$$f(a) \geqslant f(b) \text{ et } f(c) \geqslant f(b)$$
(c'est ce résultat qui est pénible à prouver !)
On se place dans le premier cas :
$$f(a) \leqslant f(b) \text{ et } f(c) \leqslant f(b)$$
   - si $f(a) \leqslant f(c)$, alors $f(c) \in [f(a), f(b)]$.
   Comme f est contiue, on dispose, par le TVI, de $d \in [ab]$ tel que $f(d) = f(c)$. Comme $d \leqslant b < c$, $d \neq c$ et $f(d) = f(c)$, donc f n'est pas injective.
   - De même si $f(a) \geqslant f(c)$.
2. Preuve jolie (merci MCV). Si f n'est pas strictement monotone, on dispose de (a, b, c, d) dans $\mathbb{R}^4$ tels que
$$a < b \text{ et } f(a) \leqslant f(b) \text{ et } c < d \text{ et } f(c) \geqslant f(d).$$
L'idée est alors de faire varier deux points « en même temps » : un entre a et b, un entre c et d. Considérons la fonction
$$\varphi : \left| \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ \quad t \mapsto f(ta + (1-t)c) - f(tb + (1-t)d) \end{array} \right.$$
Alors $\varphi(0) = f(c) - f(d) \geqslant 0$ et $\varphi(1) = f(a) - f(b) \leqslant 0$, donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, on dispose de $t_0 \in [0,1]$ tel que $\varphi(t_0) = 0$. Alors
$$f(t_0 a + (1-t_0)c) = f(t_0 b + (1-t_0)d).$$
Or, $a < b$ et $c < d$ donc, comme $t_0 > 0$ ou $1 - t_0 > 0$, $t_0 a + (1-t_0)c < t_0 b + (1-t_0)d$. Donc f n'est pas injective.

■

Remarque 53

Si f n'est pas continue, cette propriété n'est pas vraie. Prenons $f : x \mapsto \begin{cases} x \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ x+1 \text{ sinon.} \end{cases}$

3.3 Bijectivité

Proposition 54 (TVI strictement monotone – théorème de la bijection)

Soit $\mathrm{I} = (a, b) \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $\mathrm{I} = (a, b)$ avec (=] ou [et) =] ou [.
Soit $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, continue et strictement monotone. Soit $\ell_a = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\ell_b = \lim\limits_{x\to b} f(x)$.
Alors f réalise une bijection de (a, b) sur $J = (f(a), f(b))$ ou $J = (f(b), f(a))$ (le parenthèses dépendant de la nature du crochet en a et en b) et sa bijection réciproque est continue.

Remarque 55

Il faut faire attention aux crochets ouverts ou fermés. Si f :]2, 5], $f(x) \underset{x\to 2}{\longrightarrow} +\infty$ et $f(5) = 4$, alors f est une bijection de $]2, 5]$ sur $[4, +\infty[$ par exemple.

Démonstration

Le fait que f réalise une bijection est clair par le TVI et la stricte monotonie.
Ensuite, $g = f^{-1}$ est strictement monotone, de même monotonie que f.
(en effet si $y < y'$, alors on dispose de (x, x') tels que $y = f(x)$, $y' = f(x')$, et on a donc $f(x) < f(x')$. Si on avait $x \geqslant x'$, par monotonie de $f< f(x) \geqslant f(x')$, absurde !) Donc $x < x'$ i.e. $g(y) < g(y'))$.
Soit b dans J. On montre que $g(y)$ admet comme limite $g(b)$ quand y tend vers b.
Comme g est monotone, g admet une limite à gauche en b, appelons-la ℓ. Alors $g(y) \underset{y\to b^-\to\ell}{\longrightarrow}$ donc, par continuité de f, $f(g(y)) \underset{y\to b^{-1}\to f}{\longrightarrow} (\ell)$, i.e. $y \underset{y\to b^-\to f}{\longrightarrow} (\ell)$, donc, par unicité de la limite, $b = f(\ell)$. On fait de même pour la limite à droite et c'est gagné ! ■

3.4 Fonctions continues sur un segment

Dans toute la section, a et b désignent deux réels tels que $a < b$.

Proposition 56

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration

1. On montre que f est bornée.
   Si ce n'était pas le cas, on disposerait d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [a, b]^{\mathbb{N}}$ telle que $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
   (on a déjà démontré la construction d'une telle suite dans le chapitre 8 : la revoir si ce n'est pas clair)
   Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (à valeurs dans $[a, b]$), par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on dispose d'une extraction φ telle que $(x_{\varphi(n)})$ converge. Soit ℓ sa limite. Comme pour tout n dans $\mathbb{N}$, $a \leqslant x_{\varphi(n)} \leqslant \ell$, $\ell \in [a, b]$. Mais alors, par continuité de f, $f(x_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$.
   Absurde car $f(x_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   Donc f est bornée.
2. f admet donc une borne supérieure sur $[a, b]$. Soit $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = \sup\{f(x), x \in [a, b]\}$.
   Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, on dispose de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [a, b]^{\mathbb{N}}$ telle que $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$.

Par le même argument que précédemment, on dispose d'une extraction φ et d'un réel $\ell \in [a, b]$ tels que $x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Alors $f(x_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$ donc $f(\ell) = M$ par unicité de la limite.
Donc M est atteint.

3. On fait de même avec la borne inférieure.

■

Proposition 57

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Exemple 58 (Fonctions coercives)

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum et qu'elle l'atteint.