N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Chapitre 11
Dérivabilité

1 Dérivabilité

1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathrm{I}$.

(i) On dit que f est dérivable en a si la limite en a de $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. On dit que cette limite est le nombre dérivé de f en a et on la note $f'(a)$.

(ii) f est dite dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I. Cela permet de définir la fonction dérivée de f, notée $f' : x \mapsto f'(x)$.

Proposition 2

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathrm{I}$, f dérivable en a. L'équation de la tangente à la courbe de f en a est

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Proposition 3

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathrm{I}$.

(i) si f est dérivable en a, alors $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)(x - a) + o\,(x - a)$, c'est-à-dire que l'on dispose de $\varepsilon : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathrm{I},\ \ f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \varepsilon(x)(x - a),$$

et telle que $\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

(ii) réciproquement, s'il existe $k \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathrm{I},\ \ f(x) = f(a) + k.(x - a) + \varepsilon(x)(x - a)$$

et $\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = k$.

Proposition 4

Une fonction dérivable est continue. La réciproque est fausse.

Définition 5

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathrm{I}$. On dit que f est dérivable à gauche (respectivement à droite) en a si la limite à gauche (respectivement à droite) en a de $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. On note

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

alors cette limite $f'_g(a)$ (respectivement $f'_d(a)$).

Proposition 6

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathrm{I}$.

(i) si f est dérivable à gauche (resp. à droite) en a, alors f est continue à gauche (resp. à droite) en a.

(ii) si f est dérivable à gauche et à droite en a et si $f'_g(a) = f'_d(a)$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

(iii) réciproquement, si f est dérivable en a, f est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_d(a) = f'_g(a) = f'(a)$.

1.2 Opérations sur les dérivées

Proposition 7 (Théorèmes généraux)

Soient $f,\ g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathrm{I}$. On suppose f et g dérivables en a.

(i) pour tous λ et μ dans $\mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$.

(ii) $f \times g$ est dérivable en a et $(f \times g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

(iii) si g ne s'annule pas sur un voisinage de a, $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en a et $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a) = \dfrac{-g'(a)}{g(a)^2}$,

(iv) si g ne s'annule pas sur un voisinage de a, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

Proposition 8

Soit $f : \mathrm{I} \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$, $a \in \mathrm{I}$. Si f est dérivable en a, si g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ g$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$. (règle de la chaîne)

Proposition 9

Soit $f : \mathrm{I} \to J$, continue sur I, bijective, $a \in \mathrm{I}$.

(i) si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et $(f^{-1})'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

(ii) si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I, f^{-1} est dérivable sur J et

$$\forall y \in J,\ (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

1.3 Dérivées d'ordres supérieurs

Définition 10

(i) Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On définit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition « f est n fois dérivable sur I » et la fonction $f^{(n)}$ par :

(a) f est 0 fois dérivable sur I par définition. On note $f^{(0)} = f$.

(b) Pour tout n entier, si f est n fois dérivable et si $f^{(n)}$ est dérivable, alors f est $n+1$ fois dérivable et on note $f^{(n+1)} = (f^n)'$.

(ii) Si $n \in \mathbb{N}$, on définit $\mathcal{D}^n(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ comme l'ensemble des fonctions n fois dérivables de I dans $\mathbb{R}$. En particulier, $\mathcal{D}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathrm{I}}$.

(iii) Si $n \in \mathbb{N}$, on définit $\mathscr{C}^n(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I, de dérivée n-ième continue. En particulier, $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

(iv) On définit l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables, noté $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, par

$$\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{C}^n(\mathrm{I}, \mathbb{R}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}^n(\mathrm{I}, \mathbb{R}).$$

(v) Si $f \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I}, \mathbb{R}) / \mathcal{D}^n(\mathrm{I}, \mathbb{R}) / \mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, on dit que f est « de classe $\mathscr{C}^n / \mathcal{D}^n / \mathscr{C}^\infty$ ».

Remarque 11

On a les inclusions (infinies)

$$\mathcal{D}^0 \supset \mathscr{C}^0 \supset \mathcal{D}^1 \supset \mathscr{C}^1 \supset \cdots \supset \mathscr{C}^\infty.$$

TOUTES ces inclusions sont strictes. Étudier les

$$f_k : x \mapsto \begin{cases} x^{2k+1} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et } g_k : x \mapsto \begin{cases} x^{2k} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Alors f_k est de classe $\mathscr{C}^k$ mais pas $\mathcal{D}^{k+1}$, et g_k est de classe $\mathcal{D}^k$ mais pas $\mathscr{C}^k$.

Exemple 12

(i) $\exp \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \exp^{(n)} = \exp$,

(ii) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} \in \mathscr{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \neq 0,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.

(iii) sin et cos sont dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et pour n entier et x réel, $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$ et $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(iv) Si $m \in \mathbb{N}$, $P_m : x \mapsto x^m$ est dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}$,

- si $k \geqslant m+1$, $P_m^{(k)}(x) = 0$,
- si $0 \leqslant k \leqslant m$, $P_m^{(k)}(x) = \dfrac{m!}{(m-k)!} x^{m-k}$.

Proposition 13 (Dérivée n-ième d'une somme, d'un produit)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, f et g deux fonctions de $\mathscr{D}^n(\mathrm{I})$, λ et μ deux réels. Alors

- **(i)** $\lambda f + \mu g$ est n fois dérivable sur I, de dérivée n-ième $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.
- **(ii)** (règle de Leibniz) fg est n fois dérivable sur I de dérivée n-ième $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.
- **(iii)** si f est à valeurs dans J et si h est n fois dérivable sur J, $h \circ f$ est n fois dérivable sur I.
- **(iv)** si f est à valeurs dans J, bijective, si f est n fois dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est n fois dérivable sur J.

2 Théorèmes liés à la dérivation

2.1 Dérivabilité et extremum local

Définition 14

Soit f une fonction définie sur I, a un point de I.

- **(i)** f atteint un maximum (resp un minimum) local en a s'il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap I$, $f(x) \leqslant f(a)$ (resp $f(x) \geqslant f(a)$).
- **(ii)** a est un point critique de f si f est dérivable en a et $f'(a) = 0$.

Théorème 15 (Condition nécessaire d'extremum local)

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, a un point **intérieur** de I. Pour que f admette un extremum local en a, il **faut** que a soit un point critique, i.e. que $f'(a) = 0$.

2.2 Théorème de Rolle

Théorème 16

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un réel c de $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

2.3 Théorème des accroissement finis

Théorème 17 (Théorème des accroissements finis)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe c dans $]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

2.4 Corollaires du TAF

2.4.1 Inégalité des accroissements finis

Proposition 18 (Inégalités des accroissements finis)

Soit I intervalle, $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, dérivable.
Si $|f'|$ est majorée par $M > 0$ sur I, alors $\forall (x, y_{\in}\mathrm{I}^2,\ |f(y) - f(x)| \leqslant M.|y - x|$

Définition 19

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$.

(i) Soit $k > 0$. On dit que f est k-lipschitzienne si $\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2,\ |f(y) - f(x)| \leqslant k|y - x|$.

(ii) On dit que f est lipschitzienne s'il existe $k > 0$ tel que f est k-lipschitzienne.

(iii) On dit que f est contractante s'il existe $k \in]0, 1[$ tel que f est k-lipschitzienne.

Proposition 20

(i) Toute fonction lipschitzienne est continue.

(ii) Toute fonction dérivable de dérivée majorée est lipschitzienne.

(iii) Toute fonction $\mathscr{C}^1$ sur un segment est lipschitzienne.

2.4.2 Dérivée et sens de variations

Proposition 21

Soit I intervalle, $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, dérivable.

(i) Si f est croissante sur I, alors $\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) \geqslant 0$.

(ii) Si f est décroissante sur I, alors $\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) \leqslant 0$.

(iii) Si f est constante sur I, alors $\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) = 0$.

Proposition 22

Soit I un intervalle, $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable.

$$\text{Si } \begin{cases} \forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) \geqslant 0 \\ \forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) > 0 \\ \forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) \leqslant 0 \\ \forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) < 0 \\ \forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) = 0 \end{cases},\ \text{ alors } f \text{ est } \begin{cases} \text{croissante} \\ \text{strictement croissante} \\ \text{décroissante} \\ \text{strictement décroissante} \\ \text{constante} \end{cases} \text{ sur } \mathrm{I}.$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

2.4.3 Théorème de la limite de la dérivée

Proposition 23

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, I intervalle, $a \in \mathrm{I}$, f continue sur I, dérivable sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$.
Si $f'(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \in \overline{R}$, alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

Proposition 24 (Théorèmes de prolongement de la classe $\mathscr{C}^1/\mathscr{C}^k/\mathscr{C}^\infty$)

Soit I intervalle, $a \in \mathrm{I}$, $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, continue.

(i) Si f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$ et si f' possède une limite finie ℓ en a, alors f est $\mathscr{C}^1$ sur I et $f'(a) = \ell$.

(ii) Si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$, si :$\forall i \in [\![1, k]\!]\ \exists \ell_i \in \mathbb{R},\ f^{(i)}(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_i$, alors f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et
$$\forall i \in [\![1, k]\!],\ f^{(i)}(a) = \ell_i.$$

(iii) Si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$, si : $\forall i \in \mathbb{N}^*\ \exists \ell_i \in \mathbb{R},\ f^{(i)}(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_i$, alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I et
$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ f^{(i)}(a) = \ell_i.$$

3 Brève extension au monde complexe

Définition 25

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$. f est dérivable en a si $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ le sont, et sa dérivée est $f'(a) = \mathfrak{Re}(f)'(a) + i\mathfrak{Im}(f)'(a)$.

Proposition 26

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$, $a \in \mathrm{I}$.

(i) f est dérivable en a ssi $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie en a. Cette limite finie est alors $f'(a)$.

(ii) f est dérivable en a ssi il existe $k \in \mathbb{C}$, $\varepsilon : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ telle que $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, et que
$$\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) = f(a) + k(x-a) + \varepsilon(x).(x-a).$$
Dans ce cas $k = f'(a)$.

Proposition 27

Tous les résultats de la première section sont valables pour des fonctions à valeurs complexes.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Proposition 28 (Inégalité des acfroissements finis)

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$, I intervalle. Si f est $\mathscr{C}^1$ sur I et qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathrm{I},\ |f'(x)| \leqslant M$, alors $\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant M.|x - y|$.