MPSI1 – Programme de colles
Semaine 13 – du 5 au 9 janvier 2026

Structures algébriques usuelles

Cette section a pour but l'introduction des notions les plus élémentaires relatives aux groupes, anneaux, corps, afin de traiter de manière unifiée un certain nombre de situations.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Loi de composition interne	
Loi de composition interne. Associativité, commutativité, élément neutre, inversibilité, distributivité. Partie stable.	On évite l'étude de lois artificielles. Inversibilité et inverse du produit de deux éléments inversibles.
b) Structure de groupe	
Groupe.	Notation x^n dans un groupe multiplicatif, nx dans un groupe additif. Exemples usuels : groupes additifs $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, groupes multiplicatifs $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}_+^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{U}$, $\mathbb{U}_n$.
Groupe des permutations d'un ensemble.	Notation S_X.
Sous-groupe : définition, caractérisation. Morphisme de groupes. Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme.	
Image et noyau d'un morphisme. Condition d'injectivité. Isomorphisme.	Notations $\mathrm{Im}\, f$, $\mathrm{Ker}\, f$.
c) Structures d'anneau et de corps	
Anneau.	Tout anneau est unitaire. Exemples usuels : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
Calcul dans un anneau. Groupe des inversibles d'un anneau.	Relation $a^n - b^n$ et formule du binôme si a et b commutent.
Anneau intègre. Corps. Sous-anneau. Morphisme d'anneaux. Isomorphisme.	Les corps sont commutatifs.

Groupe symétrique

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.	Notation S_n.
Cycle, transposition.	Notation $(a_1\ a_2\ \dots\ a_p)$.
Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints : existence, unicité, commutativité.	La démonstration n'est pas exigible, mais les étudiants doivent savoir décomposer une permutation.
b) Signature d'une permutation	
Décomposition d'une permutation en produit de transpositions.	
Signature : il existe un unique morphisme de groupes de S_n dans $\{-1, 1\}$ envoyant toute transposition sur -1.	La démonstration n'est pas exigible.
Groupe alterné A_n	

Au programme : cours et exercices sur les structures algébriques.

Exemples de questions de cours

1. Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$.
2. Composée de morphismes.
3. Si φ est un isomorphisme, alors φ^{-1} est un morphisme.
4. L'image directe/réciproque d'un sous-groupe/anneau/corps par un morphisme est un sous-groupe/anneau/corps.
5. Noyau : définition et CNS d'injectivité.
6. Définition de l'intégrité, utilisation pour simplifier une équation $a \times b = a \times c$, exemple d'anneau non intègre.
7. Un morphisme de corps est injectif.
8. Décomposition d'une permutation en produit de transpositions.
9. Définition de la signature (comme $(-1)^{n-\omega}$ où ω est le nombre d'orbites) + la signature est un morphisme. La preuve étant assez longue, on pourra poser des bouts :
   — définition + pour tout $\sigma \in S_n$ et τ transposition, $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$,
   — en admettant $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$, montrer que ε est un morphisme.
10. Cardinal du groupe alterné A_n.