

## TD 11

### Dérivabilité

# 1 Exercices corrigés en classe

**Exercice 1.** ●●○ Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$  et que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ , il existe un polynôme  $P_n$  tel que  $\forall x > 0$ ,  $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ .
2. En déduire que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 2.** *Théorème de Rolle à l'infini.* ●●○ Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, dérivable sur  $]0, +\infty[$  et telle que  $f(0) = \lim_{+\infty} f = 0$ . On souhaite démontrer qu'il existe  $c \in ]0, +\infty[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

1. Démontrer que le résultat est trivial si  $f$  est constante.

On suppose désormais que  $f$  n'est pas constante sur  $\mathbb{R}$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que l'on dispose de  $c > 0$  tel que  $f(c) > 0$ .

2. Démontrer qu'il existe  $a \in ]0, c[$  et  $b \in ]c, +\infty[$  tel que  $f(a) = f(b)$ .
3. Conclure

**Exercice 3.** *Polynômes de Legendre.* ●●○ Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ . On définit, pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $P_n(x) = (x^2 - 1)^n$ .

1. Démontrer que pour tout  $k \leq n - 1$ ,  $P_n^{(k)}$  s'annule en  $-1$  et en  $1$ .

**Correction**

Écrivons  $P_n(x) = (x - 1)^n(x + 1)^n = f_n g_n$ . Alors, par la formule de Leibniz, pour tout  $k$ , pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$

$$P_n^{(k)} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} f_n^{(j)}(x) g_n^{(k-j)}(x).$$

Mais, si  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ ,  $f_n^{(j)}(x) = \frac{n!}{(n-j)!} (x - 1)^{n-j}$ , qui s'annule en  $1$ , et  $g_n^{(k-j)}(x) = \frac{n!}{(k-j)!} (x + 1)^{n-k+j}$ , qui s'annule en  $-1$ . Donc  $P_n^{(k)}$  s'annule en  $-1$  et en  $1$ .

2. Démontrer que pour tout  $k \leq n$ ,  $P_n^{(k)}$  s'annule  $k$  fois sur  $]-1, 1[$ .

**Correction**

Démontrons le résultat par récurrence sur  $k$ .

**Initialisation.**  $P_n^{(0)} = P_n$  s'annule en  $-1$  et en  $1$ .

**Héritéité.** Supposons que, pour un certain  $k \leq n - 1$ ,  $P_n^{(k)}$  s'annule en  $k$  points sur  $]-1, 1[$ , nommons ces points  $x_1, \dots, x_k$ . Alors, pour tout  $i$  dans  $\llbracket 1, k - 1 \rrbracket$ ,  $P_n^{(k)}$  est continue sur  $[x_i, x_{i+1}]$ , dérivable sur  $]x_i, x_{i+1}[$ , s'annule en  $x_i$  et en  $x_{i+1}$  donc, d'après le théorème de Rolle,  $P_n^{(k+1)}$  s'annule sur  $]x_i, x_{i+1}[$ . Donc  $P_n^{k+1}$  s'annule en  $k + 1$  points

de  $] -1, 1[$ .  
 De plus,  $P_n^{(k)}$  s'annule en  $-1$  et en  $1$ , donc, en appliquant le théorème de Rolle entre  $-1$  et  $x_k$  puis entre  $x_k$  et  $1$ , on obtient deux zéros supplémentaires de  $P_n^{(k+1)}$ .  
 Donc  $P_n^{(k+1)}$  s'annule  $k+1$  fois, d'où l'héritage et le résultat !

**Exercice 4.** ●○○ Soit  $a > 0$ . Déterminer, en utilisant le théorème des accroissements finis, la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (\operatorname{Arctan}(n+a) - \operatorname{Arctan}(n)).$$

**Exercice 5.** La règle de L'Hôpital. ●●○

1. Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$  et dérivables sur  $]a, b[$ . Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

**Correction**

Il s'agit de ce que l'on appelle la formule des « accroissements finis généralisés ». On va donc la démontrer de manière similaire au TAF. Considérons la fonction  $h$  définie sur  $[a, b]$  par

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x).$$

Alors  $h$  est continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$ , et

$$h(a) = (f(b) - f(a))g(a) - (g(b) - g(a))f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a),$$

$$h(b) = (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) = -f(a)g(b) + g(a)f(b) = h(a).$$

Donc d'après le théorème de Rolle, il existe un réel  $c$  de  $]a, b[$  tel que  $h'(c) = 0$ , i.e. tel que

$$(f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0,$$

i.e.

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

2. Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$  non vide et non réduit à un point et  $x_0$  une extrémité (finie ou non) de  $I$ . On suppose que  $f$  et  $g$  tendent vers 0 en  $x_0$  et que  $g$  et  $g'$  ne s'annulent pas sur  $I \setminus \{x_0\}$ . Soit  $\ell \in \mathbb{R}$ . Prouver l'implication

$$\left( \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \right) \implies \left( \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \right).$$

**Correction**

Il faut distinguer deux cas : le cas où  $x_0 \in \mathbb{R}$ , et le cas où cette borne est infinie.

- Cas où  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Quitte à remplacer  $f$  et  $g$  par leur prolongement par continuité en  $x_0$ , on peut supposer  $f$  et  $g$  définies, continues, et s'annulant en  $x_0$ . En appliquant le théorème des accroissements finis généralisé entre  $x_0$  et  $x \neq x_0$ , on obtient l'existence de  $c_x$  entre  $x_0$  et  $x$  tel que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)},$$

i.e.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Or, par encadrement,  $\lim_{x \rightarrow x_0} c_x = x_0$ , donc en composant les limites,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \ell$ . Donc  $\frac{f(x)}{g(x)}$  converge et  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ .

- Cas où  $x_0 = +\infty$ . Posons alors deux fonctions  $F$  et  $G$ , définies sur un voisinage épointé à droite 0 par  $F(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$  et  $G(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$ . Alors  $f$  et  $g$  vérifient les hypothèses du résultat précédent, et

$$\frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}g'\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \ell.$$

On en déduit donc le résultat pour  $x_0 = +\infty$  !

3. Retrouver comme cas particulier le théorème de la limite de la dérivée vu en cours.

**Correction**

On retrouve le résultat en prenant  $g(x) = x$  !

4. Appliquer ce résultat aux calculs des limites suivantes

$$(a) \lim_{x \rightarrow e} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln x - 1}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x} \quad (c \neq d),$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x - \sin \frac{1}{x}}{e^x - e^{1/x}}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

**Correction**

Applications (on ne réécrit pas à chaque fois que les fonctions vérifient les hypothèses de la règle de l'Hôpital mais c'est important de les vérifier : est important le fait que  $g'$  soit de signe constant autour de  $x_0$ . En effet, si

$$f(x) = x + \cos(x) \sin(x) \text{ et } g(x) = e^{\sin(x)}(x + \cos(x) \sin(x))$$

alors

$$f'(x) = 2 \cos^2(x) \text{ et } g'(x) = e^{\sin(x)} \cos(x)(x + \sin(x) \cos(x) + 2 \cos(x))$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cos(x)}{e^{\sin(x)}(x + \sin(x) \cos(x) + 2 \cos(x))} = 0,$$

mais  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{e^{\sin(x)}}$  n'admet pas de limite en  $+\infty$  !

$$(a) \lim_{x \rightarrow e} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln x - 1} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \sqrt{e}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a)a^x - \ln(b)b^x}{\ln(c)c^x - \ln(d)d^x} = \frac{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{\ln\left(\frac{c}{d}\right)}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x - \sin \frac{1}{x}}{e^x - e^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos x + \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}}{e^x + \frac{1}{x^2} e^{1/x}} = \frac{\cos(1)}{e}$$

**Stratégie :**

- Il faut pouvoir calculer des dérivées : les exercices 6 et 7 servent à cela.
- Il faut pouvoir étudier des dérivabilités : les exercices 10, 11, 12 (prolongement de 12) sont dédiés à cela.
- Deux exercices s'appuient sur la dérivée comme développement limité à l'ordre 1 : l'exercice 8, assez simple, et l'exercice 15, beaucoup plus complexe.
- Des applications du théorème de Rolle : quelques très classiques comme 16 ou . Les exercices 17, 18 et 19 sont aussi des applications très faisables de Rolle.
- Des applications du TAF : outre 4, les exercices 21 et 22 sont assez importants. 23 est une variation.
- Quelques autres exercices intéressants comme 24 et surtout 25.

**Minimum requis :** exercice 6 ((a) et (d)), exercice 7 ((a) et (b)), exercice 12 **si jamais le 1 a mal été compris**, exercice 16 et 3, exercice 21.

## 2 Dérivabilité et définition de la dérivée – classe $\mathcal{C}^n$ – limite de la dérivée

**Exercice 6.** ●○○

Dériver les fonctions suivantes

$$1. f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$2. g : x \mapsto \sqrt[3]{\sin \left( \frac{x+1}{x+2} \pi \right)}$$

$$3. h : x \mapsto \ln \left( \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x} \right)$$

$$4. k : x \mapsto \sqrt{\tan(x)}.$$

**Correction**

$$1. f' : x \mapsto \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$2. g' : x \mapsto \frac{1}{3} \left( \sin \left( \frac{x+1}{x+2} \pi \right) \right)^{-\frac{2}{3}} \times \cos \left( \frac{x+1}{x+2} \pi \right) \times \frac{\pi}{(x+2)^2}.$$

$$3. h' : x \mapsto \frac{4x^2 - 4x - 2}{x(x+1)(x^2 - 3x + 2)}.$$

$$4. k' : x \mapsto \frac{1 + \tan^2(x)}{2\sqrt{\tan(x)}}.$$

**Exercice 7.** ●○○

Calculer les dérivées  $n$ -ièmes des fonctions suivantes

1.  $f : x \mapsto a^x$  ( $a > 0$ )      2.  $g : x \mapsto xe^x$   
 3.  $h : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$       4.  $k : x \mapsto e^{x\sqrt{3}} \cos(x)$

**Correction**

1. On montre par récurrence, et en utilisant que  $a^x = e^{x \ln(a)}$ , que pour tout  $n$ ,  $f^{(n)} : x \mapsto (\ln(a))^n a^x$ .  
 2. On montre, en utilisant la formule de Leibniz, ou par récurrence que, pour tout  $n$ ,  $f^{(n)} : x \mapsto ne^x + xe^x$ .  
 3. Écrivons

$$h(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 1 + 2}{x^2 - 1} = 1 + \frac{2}{x^2 - 1} = 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1},$$

donc si  $n > 0$ ,

$$h^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left( \frac{1}{(x-1)^n} - \frac{1}{(x+1)^n} \right).$$

4. Écrivons  $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ . Alors pour tout réel  $x$ ,

$$k(x) = \frac{1}{2} \left( e^{x(\sqrt{3}+i)} + e^{x(\sqrt{3}-i)} \right),$$

donc

$$k^{(n)} = \frac{1}{2} \left( (\sqrt{3}+i)^n e^{x(\sqrt{3}+i)} + (\sqrt{3}-i)^n e^{x(\sqrt{3}-i)} \right).$$

Or,

$$(\sqrt{3}+i)^n = 2^n e^{in\frac{\pi}{6}} \text{ et } (\sqrt{3}-i)^n = 2^n e^{-in\frac{\pi}{6}},$$

donc

$$k^{(n)}(x) = 2^n e^{\sqrt{3}x} \frac{e^{i(x+n\frac{\pi}{6})} + e^{-i(x+n\frac{\pi}{6})}}{2} = 2^n e^{\sqrt{3}x} \cos\left(x + n\frac{\pi}{6}\right).$$

**Exercice 8.** Démontrer que les courbes d'équation  $y = x^2$  et  $y = \frac{1}{x}$  admettent une unique tangente commune.

**Correction**

Nommons  $f_1 : x \mapsto x^2$  et  $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x}$ ,  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  leurs courbes respectives.

Soit  $a$  dans  $\mathbb{R}$ . La tangente à  $\mathcal{C}_1$  en  $a$  a pour équation  $y = a^2 + 2a(x - a) = 2ax - a^2$ .

Soit  $b$  dans  $\mathbb{R}^*$ . La tangente à  $\mathcal{C}_2$  en  $b$  a pour équation  $y = \frac{1}{b} - \frac{x-b}{b^2} = \frac{2}{b} - \frac{x}{b^2}$ .

Ces deux droites coïncident si et seulement si

$$\begin{cases} 2a = -\frac{1}{b^2} \\ -a^2 = \frac{2}{b} \end{cases}$$

Ce système n'est pas linéaire, on peut substituer... La première équation étant  $a = \frac{-1}{2b^2}$ , la seconde devient  $-\frac{1}{4b^4} = \frac{2}{b}$ , i.e.  $b^3 = -\frac{1}{8}$ , i.e.  $b = -\frac{1}{2}$ , et donc  $a = -2$ . Réciproquement  $(-2, -1/2)$  est bien solution.

Donc  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  ont une unique tangente commune, c'est la droite  $y = -4x - 4$ .

**Exercice 9.** ●○○

Que dire de la dérivée d'une fonction paire ? d'une fonction impaire ? d'une fonction périodique ?

**Correction**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable.

- si  $f$  est paire alors pour tout  $x$  réel,  $f(-x) = f(x)$  donc  $-f'(-x) = f'(x)$  donc  $f'(-x) = -f'(x)$  donc  $f'$  est impaire.
- si  $f$  est impaire alors pour tout  $x$  réel,  $f(-x) = -f(x)$  donc  $-f'(-x) = -f'(x)$  donc  $f'(-x) = f'(x)$  donc  $f'$  est paire.
- si  $f$  est périodique, on dispose de  $T > 0$  tel que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f(x + T) = f(x)$ , donc  $f'(x + T) = f'(x)$ , donc  $f'$  est aussi  $T$ -périodique.

**Exercice 10.** ●○○

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes

- $f : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$
- $g : x \mapsto \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1, \\ (x-1)^3 & \text{si } x > 1. \end{cases}$
- $h : x \mapsto x|x|$
- $k : x \mapsto \frac{|x|}{1 + |x-1|}$

**Correction**

- La fonction  $f$  est **continue** sur  $\mathbb{R}_+$  par les théorèmes généraux, et, de même, elle est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Pour tout  $x > 0$ ,  $f' : x \mapsto -\frac{1}{2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ . Or,  $\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ , donc  $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$  donc, par le théorème de la limite de la dérivée,  $f$  est dérivable en 0 de dérivée égale à  $-\frac{1}{2}$ .
- $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (notamment en 1, car les limites à gauche et à droite de  $g$  coïncident), dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  et  $g' : x \mapsto \begin{cases} 2(x-1) & \text{si } x < 1, \\ 3(x-1)^2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$  Donc  $g'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$ .

donc, par le théorème de la limite de la dérivée,  $g$  est dérivable en 1 de dérivée égale à 0.

3.  $h$  est dérivable en tout réel non nul par les théorèmes généraux. Montrons qu'elle est dérivable en 0 : pour tout  $x$  réel,  $\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ . Donc  $h$  est dérivable en 0.
4.  $k$  est dérivable en tout réel différent de 0 et 1 par les théorèmes généraux.

**Étude en 0.** Pour tout réel  $x$ ,

$$\frac{k(x) - k(0)}{x - 0} = \frac{\frac{|x|}{1+|x-1|}}{x} = \frac{\operatorname{sgn}(x)}{1+|x-1|},$$

n'a pas de limite quand  $x$  tend vers 0. Donc  $k$  n'est pas dérivable en 0.

**Étude en 1.** Pour tout réel  $x$ ,

$$\frac{k(x) - k(1)}{x - 1} = \frac{\frac{|x|}{1+|x-1|} - 1}{x - 1} = \frac{|x| - 1 - |x - 1|}{(1 + |x - 1|)(x - 1)}.$$

Si  $x > 1$ ,

$$\frac{|x| - 1 - |x - 1|}{(1 + |x - 1|)(x - 1)} = \frac{x - 1 - (x - 1)}{(1 + x - 1)(x - 1)} = 0.$$

Si  $0 < x < 1$ ,

$$\frac{|x| - 1 - |x - 1|}{(1 + |x - 1|)(x - 1)} = \frac{x - 1 - (1 - x)}{(1 + 1 - x)(x - 1)} = \frac{2}{2 - x},$$

donc  $\frac{k(x) - k(1)}{x - 1}$  n'admet pas les mêmes limites à gauche et à droite en 1, donc  $k$  n'est pas dérivable en 1.

### Exercice 11. ●●○

1. À quelle condition la valeur absolue d'une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  est-elle dérivable ?

#### Correction

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable. Montrons que  $|f|$  est dérivable si et seulement si

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad f(a) = 0 \Rightarrow f'(a) = 0.$$

**On montre le sens réciproque :**

Soit  $a \in \mathbb{R}$ .

Déjà, si  $a$  est dans  $\mathbb{R}$  tel que  $f(a) \neq 0$ , comme  $f$  est dérivable, elle est continue et on dispose de  $\eta > 0$  tel que  $f$  ne s'annule pas et reste de signe constant sur  $[a - \eta, a + \eta]$ . Donc sur cet intervalle,  $f$  est du signe de  $f(a)$ . Si  $f(a) > 0$ ,  $\forall x \in [a - \eta, a + \eta], |f(x)| = f(x)$ , dérivable, donc dérivable en  $a$ . Si  $f(a) < 0$ ,  $\forall x \in [a - \eta, a + \eta], |f(x)| = -f(x)$ , dérivable, donc dérivable en  $a$ .

Maintenant, si  $f(a) = 0$ , alors  $f'(a) = 0$ , donc on dispose de  $\varepsilon$  qui tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $a$  telle que pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$f(x) = 0 + 0 \times (x - a) + \varepsilon(x) \times (x - a),$$

donc  $|f(x)| = |\varepsilon(x)||x - a| = (x - a)|\varepsilon(x)||\eta(x)|$ , avec  $\eta(x) = 1$  si  $x - a > 0$  et  $-1$  si  $x - a < 0$ . Donc  $|\varepsilon(x)||\eta(x)| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ , donc  $|f|$  est dérivable en  $a$  de dérivée nulle !

**Sens direct : on montre la contraposée :**

Supposons que  $|f|$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $a$  tel que  $f(a) = 0$ . Comme  $|f|$  est toujours positive,  $a$  est alors un minimum local de  $|f|$  atteint à l'intérieur de l'intervalle considéré (on s'est placé sur  $\mathbb{R}$ ), donc  $|f'|(a) = 0$ . On dispose alors de  $\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} 0$  et que pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$|f(x)| = (x - a)\varepsilon(x).$$

Mais alors si on prend  $\eta$  la fonction égale au signe de  $f$  (et nulle quand  $f$  est nulle), on a pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x - a)\varepsilon(x)\eta(x)$ , avec, comme  $\eta$  est bornée,  $\varepsilon(x)\eta(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} 0$ . Donc  $f'(a) = 0$ . D'où le résultat !

2. À quelle condition le maximum de deux fonctions dérивables sur  $\mathbb{R}$  est-il dérivable ?

**Correction**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérивables de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Alors  $\max(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2}$ , donc  $\max(f, g)$  est dérivable ssi  $|f - g|$  est dérivable, donc ssi

$$\forall a \in \mathbb{R}, f(a) = g(a) \Rightarrow f'(a) = g'(a).$$

**Exercice 12.** ●●○ Soit  $f$  définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , et représenter le graphe de  $f$ .

**Correction**

On remarque que si on pose  $g : x \mapsto \begin{cases} e^{\frac{1}{2(x-1)}} & \text{si } x < 1, \\ 0 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$  et  $h : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{2(x+1)}} & \text{si } x > -1, \\ 0 & \text{si } x \leq -1. \end{cases}$ , alors  $f = gh$ . Or on a démontré en cours, par récurrence, le caractère  $\mathcal{C}^\infty$  de  $k : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$ , d'où celui de  $g$  et  $h$  et celui de  $f$ . On obtient une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  à support inclus dans un segment (i.e. nulle en-dehors de  $[0, 1]$ )

**Exercice 13.** ●●○ Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f'(0) = 0$ .

Montrer qu'il existe une fonction  $g$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  telle que pour tout réel  $x$  positif on ait  $f(x) = g(x^2)$ .

**Exercice 14.** ●●○ Soit, pour  $\lambda$  et  $\mu$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $\varphi_{\lambda, \mu} : x \mapsto e^x + \lambda e^{-x} + \mu x$ . Déterminer une CNS sur  $\lambda$  et  $\mu$  pour que  $\varphi_{\lambda, \mu}$  soit une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$  dont la bijection réciproque est  $\mathcal{C}^1$ .

**Correction**

**Condition nécessaire.** On suppose que  $\lambda$  et  $\mu$  sont choisis de sorte que  $\varphi_{\lambda, \mu}$  soit une bijection  $\mathcal{C}^1$  de bijection réciproque  $\mathcal{C}^1$ . Alors

- $\varphi_{\lambda, \mu}$  est strictement monotone. Or, pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$\varphi'_{\lambda, \mu}(x) = e^x - \lambda e^{-x} + \mu.$$

- Si  $\lambda > 0$ , alors  $\varphi'_{\lambda,\mu}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  et  $\varphi'_{\lambda,\mu}(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$ , donc  $\varphi'_{\lambda,\mu}$  change strictement de signe, donc  $\varphi_{\lambda,\mu}$  change strictement de variations. C'est absurde !
- Si  $\lambda = 0$ , alors  $\varphi'_{\lambda,\mu} : x \mapsto e^x + \mu$ , qui change strictement de signe dès lors que  $\mu < 0$ . Donc, nécessairement,  $\boxed{\text{si } \lambda = 0, \mu \geq 0}$ .
- Si  $\lambda < 0$ , écrivons  $\lambda = -\xi$ , alors on étudie le signe de  $\varphi'_{\lambda,\mu}$ , en étudiant ses variations. Pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$\varphi''_{\lambda,\mu}(x) = e^x + \lambda e^{-x}.$$

Alors on a les équivalences suivantes :

$$\varphi''_{\lambda,\mu}(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq -\lambda e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} \geq \xi \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2} \ln(\xi).$$

Le minimum de  $\varphi'_{\lambda,\mu}$  est donc atteint en  $\frac{1}{2} \ln(\xi)$ , et il vaut alors

$$\varphi'_{\lambda,\mu}\left(\frac{1}{2} \ln(\xi)\right) = e^{\frac{1}{2} \ln(\xi)} - \lambda e^{-\frac{1}{2} \ln(\xi)} + \mu = \sqrt{\xi} - \frac{1}{\sqrt{\xi}} + \mu = \frac{\xi - 1 + \mu\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}.$$

On étudie alors le polynôme  $X^2 + \mu X - 1$  : son signe donnera la relation devant être vérifiée entre  $\mu$  et  $\xi$ . Le discriminant du polynôme est  $\mu^2 + 4 > 0$ , d'où deux racines :  $\frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4}}{2}$ . Donc si  $\lambda < 0$ , le minimum de  $\varphi'_{\lambda,\mu}$  est atteint en un réel positif (ou nul) si et seulement si

$$\sqrt{\xi} \notin \left[ \frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 + 4}}{2}, \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 + 4}}{2} \right],$$

mais, comme  $\xi > 0$ , la condition se réécrit  $\sqrt{\xi} \geq \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 + 4}}{2}$ , ou encore  $\xi \geq \frac{(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 4})^2}{4}$ , ou encore

$$\lambda \leq -\frac{(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 4})^2}{4}$$

### Exercice 15. ●●●

1. Soit  $f$  dérivable en 0. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$  existe et la déterminer (on reviendra à la définition de la dérivabilité en termes de développement limité).

#### Correction

$f$  est dérivable en 0 donc on dispose d'une fonction  $\varepsilon$  tendant vers 0 en 0 et d'un voisinage  $V$  de 0 tels que

$$\forall x \in V, f(x) = f(0) + f'(0)x + x\varepsilon(x).$$

Or, pour tout  $k$  dans  $\{0, \dots, n\}$ ,  $\frac{k}{n^2} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc, pour  $n$  assez grand,  $0, \frac{1}{n^2}, \dots, \frac{1}{n}$

sont dans  $V$ . Donc

$$\sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \sum_{k=0}^n \left[ f(0) + f'(0) \left(\frac{k}{n^2}\right) \left(1 + \varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)\right) \right]$$

On va supposer ici  $f(0) = 0$  (sinon la limite sera infinie). Donc

$$\sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) = f'(0) \sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2} \left(1 + \varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)\right).$$

Nommons  $\varepsilon_n$  le maximum de  $|\varepsilon|$  sur  $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ . Afin de manipuler les inégalités, supposons  $f'(0) \geq 0$ . On en déduit que

$$f'(0) \sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2} (1 - \varepsilon_n) \leq \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq f'(0) \sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2} (1 + \varepsilon_n),$$

i.e.

$$f'(0) \frac{n(n+1)}{2n^2} (1 - \varepsilon_n) \leq \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq f'(0) \frac{n(n+1)}{2n^2} (1 + \varepsilon_n),$$

En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on en déduit, par encadrement, que  $\sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$  converge

vers  $\frac{f'(0)}{2}$ .

2. Application : montrer que  $\prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$  admet une limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  et déterminer cette limite.

**Correction**

Posons  $P_n = \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$  et  $S_n = \ln(P_n)$ . Alors  $S_n = \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ . Donc  $S_n$  converge vers la dérivée en 0 de  $x \mapsto \ln(1 + x)$ , i.e. vers  $\frac{1}{2}$ .

### 3 Théorèmes globaux

#### 3.1 Théorème de Rolle

**Exercice 16.** ●●○ Montrer que pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , pour toute  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , si  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $[0, 1]$  et si  $f$  s'annule au moins  $n + 1$  fois sur  $[0, 1]$ , alors  $f^{(n)}$  s'annule au moins une fois sur  $[0, 1]$ .

**Correction**

Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ . Soit  $f$  dérivable  $n$  fois sur  $[0, 1]$ ,  $a_0 < a_1 < \dots < a_n$  les points d'annulation de  $f$ . On montre par récurrence sur  $k \leq n$  que  $f^{(k)}$  s'annule  $n + 1 - k$  fois sur  $[0, 1]$ .

**L'initialisation** est donnée par l'exercice.

**Héritéité.** On suppose que  $f^{(k)}$  s'annule  $n + 1 - k$  fois sur  $[0, 1]$  pour un certain  $k \leq n - 1$ .

Soient  $b_0 < \dots < b_{n-k}$  ces points d'annulation. Alors pour tout  $i$  dans  $\llbracket 0, n-k-1 \rrbracket$ ,  $f^{(k)}$  est continue sur  $[b_i, b_{i+1}]$ , dérivable sur  $]b_i, b_{i+1}[$  et  $f^{(k)}(b_i) = f^{(k)}(b_{i+1})$  donc, d'après le théorème de Rolle, on dispose de  $c_i$  dans  $]b_i, b_{i+1}[$  tel que  $f^{(k+1)}(c_i)$  s'annule. On a donc trouvé  $n+1-(k+1)$  points  $b_0 < c_0 < b_1 < \dots < c_{n-k-1} < b_{n-k}$  d'annulation de  $f^{(k+1)}$ .

**D'où l'hérédité** et le résultat par récurrence, en particulier pour  $k=n$ .

**Exercice 17.** ●●○

Soit  $P$  un polynôme. Montrer que l'équation  $P(x) = e^x$  n'admet qu'un nombre fini de solutions sur  $\mathbb{R}$ .

**Correction**

Soit  $n$  le degré de  $P$ . Supposons que  $f : x \mapsto e^x - P(x)$  s'annule au moins  $n+2$  fois sur  $\mathbb{R}$ . Alors, par l'exercice 16, la dérivée  $n+1$ -ième de  $f$  s'annule au moins une fois sur  $\mathbb{R}$ . Or la dérivée  $n+1$ -ième de  $P$  est nulle, donc  $x \mapsto e^x$  s'annule au moins une fois sur  $\mathbb{R}$ , c'est absurde.

Donc l'équation admet au plus  $n+2$  solutions (en particulier c'est un nombre fini).

**Exercice 18.** ●●○ Soient  $a$  et  $b$  deux réels,  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. On considère  $P : x \mapsto x^n + ax + b$ .

1. Montrer que  $P$  s'annule au plus 3 fois sur  $\mathbb{R}$ .

**Correction**

Posons  $k$  le nombre de zéros de  $P$ . Alors, comme  $P$  est continu donc dérivable sur  $\mathbb{R}$ , par le théorème de Rolle appliqué entre chacune des racines de  $P$ ,  $P'$  s'annule  $k-1$  fois. De même,  $P''$  s'annule  $k-2$  fois sur  $\mathbb{R}$ , i.e.  $xn(n-1) \mapsto x^{n-2}$  s'annule  $k-2$  fois sur  $\mathbb{R}$ . Or  $x \mapsto x^{n-2}$  s'annule au plus 1 fois sur  $\mathbb{R}$ , donc  $k-2 \leq 1$ , donc  $k \leq 3$ . D'où le résultat.

2. Montrer que si  $n$  est pair,  $P$  s'annule au plus 2 fois sur  $\mathbb{R}$ .

**Correction**

Si de plus  $n$  est pair, nommons toujours  $k$  le nombre de zéros de  $P$ . Alors par les mêmes arguments que précédemment,  $P'$  s'annule  $k-1$  fois sur  $\mathbb{R}$ , i.e.  $x \mapsto nx^{n-1} + a$  s'annule  $k-1$  fois sur  $\mathbb{R}$ . Comme  $n$  est pair,  $n-1$  est impair donc  $x \mapsto nx^{n-1} + a$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , donc s'annule au plus une fois sur  $\mathbb{R}$ . Donc  $k-1 \leq 1$ , donc  $k \leq 2$ .

**Exercice 19.** ●●○ Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , dérivable, telle que  $f(0) = f'(0) = 0$  et  $\exists a > 0, f(a) = 0$ . Montrer qu'il existe un point de la courbe de  $f$ , différent de l'origine, où la tangente passe par l'origine du repère.**Correction**

Traduisons analytiquement la condition géométrique décrite. Soit  $c$  dans  $\mathbb{R}_+$ . L'équation de la tangente à la courbe de  $f$  en  $c$  est  $y = f(c) + f'(c)(x - c)$ . Demander à ce que cette droite passe par 0, c'est demander que  $0 = f(c) - cf'(c) = c \left( \frac{f(c)}{c} - f'(c) \right)$ . Cela incite

à considérer la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Or,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0$ , donc  $g$  est continue en 0. Donc  $g$  est continue sur  $[0, a]$ , dérivable sur  $]0, a[$ , et  $g(0) = 0$ ,  $g(a) = 0$ . Donc d'après le théorème de Rolle,  $g$  s'annule en un point  $c$  de  $]0, a[$ . Or,

$$g'(c) = \frac{f'(c)c - f(c)}{c^2},$$

donc  $f'(c)c - f(c) = 0$ , ce qui correspond exactement à la condition trouvée ! D'où le résultat.

**Exercice 20.** ●●● Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et bornée.

1. Montrer que si une dérivée  $f^{(k)}$  admet un nombre fini de zéros, alors les dérivées précédentes  $f^{(p)}$ ,  $1 \leq p < k$  tendent vers 0 en  $\pm\infty$ .
2. Rappeler le théorème de Rolle à l'infini.
3. En déduire que, pour  $k \geq 2$ ,  $f^{(k)}$  s'annule au moins  $k - 1$  fois.

### 3.2 Théorème et inégalité des accroissements finis

**Exercice 21.** ●○○

Montrer les inégalités suivantes

1.  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $|\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(y)| \leq |x - y|$
2.  $\forall x \in \mathbb{R}_+$ ,  $x \leq e^x - 1 \leq xe^x$
3.  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \text{ch}(x) - 1 \leq x\text{sh}(x)$

**Correction**

1. Soit  $f : x \mapsto \text{Arctan}(x)$ . Alors  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f' : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ . En particulier, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $|f'(x)| \leq 1$ , donc, d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $|\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(y)| \leq |x - y|$ .
2. On pose  $f : x \mapsto e^x$ . Alors  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $x$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ . En appliquant le théorème des accroissements finis entre 0 et  $x$ , on dispose de  $c$  dans  $]0, x[$  tel que  $e^x - 1 = f'(c)(x - 0) = e^c x$ . Or,  $0 \leq x \leq c$  donc  $1 \leq e^c \leq e^x$ , donc

$$x \leq e^x - 1 \leq x e^x.$$

3. Soit  $x$  un réel positif. La fonction  $\text{ch}$  est continue sur  $[0, x]$ , dérivable sur  $]0, x[$ , de dérivée égale à  $\text{sh}$ , donc, d'après le théorème des accroissements finis, on dispose de  $c$  dans  $]0, x[$  tel que

$$\text{ch}(x) - 1 = \text{sh}(c)x.$$

Si  $x \geq 0$ ,  $0 \leq \text{sh}(c) \leq \text{sh}(x)$ , donc, comme  $x \geq 0$ ,  $0 \leq x \text{sh}(c) \leq x \text{sh}(x)$ , donc  $0 \leq \text{ch}(x) - 1 \leq x \text{sh}(x)$ .

Si  $x \leq 0$ ,  $x \leq \text{sh}(c) \leq 0$ , donc, comme  $x \leq 0$ ,  $0 \leq x \text{sh}(c) \leq x \text{sh}(x)$ , donc  $0 \leq \text{ch}(x) - 1 \leq x \text{sh}(x)$ .

D'où le résultat.

**Exercice 22.** *Série harmonique – le retour.* ●○○ En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}.$$

En déduire (pour la  $n+1$ -ième fois) que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k} = +\infty$ , et déterminer, si elle existe, la limite

quand  $n$  tend vers  $+\infty$  de  $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ .

**Correction**

Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Appliquons le théorème des accroissements finis entre  $x$  et  $x+1$  : on dispose de  $c_x \in ]x, x+1[$  tel que  $\ln(x+1) - \ln(x) = \frac{1}{c_x}$  (la dérivée de  $\ln$  en  $c_x$ ). Or,  $x \leq c_x \leq x+1$  donc  $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{c_x} \leq \frac{1}{x}$ , donc  $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$ . Donc  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln(k) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  d'où le résultat !

**Exercice 23.** ●○○ Soit  $f$  une fonction dérivable d'un segment  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f(a) = f(b)$  et que  $f'(a) = 0$ . Montrer qu'il existe  $c$  dans  $]a, b[$  tel que

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

**Correction**

Ici, on ne peut pas directement appliquer le théorème des accroissements finis ! Considérons

la fonction

$$g : x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } x \neq a, \\ 0 & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Alors  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = f'(a) = 0$ , donc  $g$  est définie et continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$ , et  $g(a) = 0$ ,  $g(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$ . Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe  $c$  dans  $]a, b[$  tel que  $g'(c) = 0$ . Or, pour tout  $x$  dans  $]a, b[$ ,

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x - a) - (f(x) - f(a))}{(x - a)^2}.$$

Donc

$$\frac{f'(c)(c - a) - (f(c) - f(a))}{(x - a)^2} = 0,$$

i.e.

$$f'(c)(c - a) = f(c) - f(a),$$

donc, comme  $c \neq a$ ,

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

D'où le résultat.

## 4 Autres exercices

**Exercice 24.** Vers de l'analyse un peu fine. ●●○

Soit  $f$  une fonction continûment dérivable de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , telle que  $\begin{cases} f(0) = 0, \\ f'(0) = 1, \\ f(1) < 0. \end{cases}$

On veut montrer qu'il existe un « premier temps de retour à 0 », c'est-à-dire qu'il existe un réel  $a$  de  $[0, 1]$  tel que

$$f(a) = 0 \text{ et } \forall 0 < x < a, f(x) \neq 0.$$

1. Montrer qu'il existe un réel  $\delta$  tel que  $\forall x \in ]0, \delta[, f(x) > 0$ .

### Correction

$f$  est dérivable en 0 de dérivée égale à 1, donc on dispose d'une fonction  $\varepsilon$  définie au voisinage de 0,  $V$ , tendant vers 0 en 0, telle que

$$\forall x \in V, f(x) = f(0) + f'(0)x + x\varepsilon(x) = x(1 + \varepsilon(x)).$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ , on dispose de  $\delta_0 > 0$  tel que pour tout  $x \in ]0, \delta_0[$ ,  $|\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{2}$ .

Pour  $x$  dans  $]0, \delta_0[$ , on a alors  $1 + \varepsilon(x) \geq \frac{1}{2}$ , donc  $x(1 + \varepsilon(x)) \geq \frac{x}{2} > 0$ , i.e.  $f(x) > 0$ .

2. Considérons alors l'ensemble  $A = \{\delta \in ]0, 1[, \forall x \in ]0, \delta[, f(x) > 0\}$ .

(a) Justifier que  $A$  a une borne supérieure, appelons-là  $a$ .

**Correction**

L'ensemble  $A$  est une partie de  $\mathbb{R}$  non vide (il contient  $\delta_0$ ), majorée. Donc  $A$  admet une borne supérieure.

(b) Montrer que  $f(a) = 0$ .

**Correction**

Déjà,  $f(1) < 0$  donc nécessairement  $a \neq 1$ .

Si  $f(a) \neq 0$ , supposons  $f(a) > 0$ .  $f$  est continue en  $a$  donc il on dispose de  $\eta > 0$  tel que pour tout  $x$  de  $]a - \eta, a + \eta[$ ,  $f(x) > 0$ . Donc  $a + \frac{\eta}{2} \in A$ , c'est absurde. Donc  $f(a) = 0$ .

(c) Montrer que  $\forall x \in ]0, a[$ ,  $f(x) > 0$ , et conclure.

**Correction**

Soit  $x \in ]0, a[$ . Posons  $\varepsilon = a - x > 0$ . Alors par les propriétés de la borne supérieure, on dispose d'un élément  $\delta$  de  $A$  tel que  $a - \delta < \varepsilon$ , i.e.  $x < \delta < a$ . Donc, par définition de  $\delta$ ,  $f(x) > 0$ .

On en déduit que  $f(a) = 0$  et que  $\forall x \in ]0, a[$ ,  $f(x) > 0$ .

**Exercice 25.** ●●● Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , dérivable. On définit

$$\Phi : \begin{cases} [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases} \end{cases} \quad \Psi : \begin{cases} [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} & \text{si } x \neq b \\ f'(b) & \text{si } x = b \end{cases} \end{cases}$$

1. En étudiant les fonctions  $\Phi$  et  $\Psi$ , montrer que  $f'$  prend toutes les valeurs du segment d'extrémités  $f'(a)$  et  $f'(b)$ .

Ainsi,  $f'$  vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.

**Correction**

Premier point,  $\Phi$  et  $\Psi$  sont clairement continues sur  $[a, b]$  par définition de la dérivabilité de  $f$ .

Ensuite, on peut supposer, sans perte de généralité,  $f'(a) < f'(b)$ .

On remarque que le point  $\tau = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  est un point important, car c'est une valeur atteinte par  $\Phi$  et  $\Psi$ . On distingue alors trois cas !

- $f'(a) \leq \tau \leq f'(b)$  : en fonction d'où est  $M$  (dans  $[f'(a), \tau]$  ou  $[\tau, f'(b)]$ ), on peut faire un TVI sur  $\Phi$  ou  $\Psi$

Soit alors  $M$  dans  $]f'(a), f'(b)[$  (on peut prendre le segment ouvert car sinon c'est évident!).

On sait que  $\Phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a) < M$  donc on dispose de  $\eta > 0$  tel que  $\forall x \in [a, a + \eta]$ ,  $\Phi(x) < M$ .

On sait que  $\Psi(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} f'(b) > M$  donc on dispose de  $\eta' > 0$  tel que  $\forall x \in [b - \eta', b]$ ,  $\Psi(x) > M$ .

Ensuite,  $M$  se situe entre  $\Phi(a + \eta)$  et  $\Psi(b - \eta')$ . De plus,  $\Phi(b) = \Psi(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ . Donc, nécessairement,  $M$  est ou supérieur ou inférieur à cette quantité, i.e.

- ou bien  $\Phi(a + \eta) < M \leq \Phi(b)$
- ou bien  $\Psi(a) \leq M < \Psi(b - \eta)$ .

Sans perte de généralité, on peut supposer que l'on est dans la première situation. Alors par continuité de  $\Phi$  et par le théorème des valeurs intermédiaires, on dispose de  $\alpha$  dans  $[a + \eta, b]$  tel que  $M = \Phi(\alpha)$ , i.e.  $M = \frac{f(\alpha) - f(a)}{\alpha - a}$ . Maintenant, par le théorème des accroissements finis, on dispose de  $c$  dans  $]a, \alpha[$  tel que  $\frac{f(\alpha) - f(a)}{\alpha - a} = f'(c)$ , i.e.  $M = f'(c)$ . Le résultat est donc démontré !

## 2. Pourquoi ne peut-on pas appliquer le TVI sur $f'$ ?

### Correction

Simplement parce que  $f$  n'est que dérivable : rien ne nous dit que  $f'$  est continue !

### Indications.

- 6 Calculs directs. Ne pas hésiter, quand il y a une dérivée compliquée, à l'écrire sous la forme  $f \circ g \circ h$  et à expliciter sa dérivée à l'aide de la règle de la chaîne.
- 7
  1. Récurrence évidente.
  2. Utiliser la formule de Leibniz sur  $g : x \mapsto xe^x$
  3. Essayer d'exprimer  $h$  simplement, en écrivant  $x^2 + 1 = 2 + x^2 - 1$ , puis en écrivant  $\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1}$  avec  $a$  et  $b$  à déterminer.
- 8 **ATTENTION !** La tangente commune n'est pas tangente aux deux courbes **au même point**. Un conseil : écrire l'équation de la tangente à la courbe de  $x \mapsto x^2$  en  $a \in \mathbb{R}$  et l'équation de la tangente à la courbe de  $x \mapsto \frac{1}{x}$  en  $b \in \mathbb{R}^*$ , puis égaliser les deux équations de tangentes.
- 9 Écrire les définitions, et dériver les égalités en faisant attention aux fonctions composées.
- 10 Utiliser les théorèmes généraux pour toutes les fonctions non problématiques, puis utiliser le théorème de la limite de la dérivée ou bien le taux de variations.
- 11
  1. Montrer que  $|f|$  est dérivable si et seulement si  $\forall a \in \mathbb{R}, f(a) = 0 \Rightarrow f'(a) = 0$ . (en montrant la réciproque, puis la contraposée du sens direct)
  2. Utiliser les expressions du maximum et du minimum à l'aide de la valeur absolue !
- 12 Remarquer que  $\frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + x}$  et utiliser l'exercice 1.
- 15 Utiliser la seconde définition de la dérivabilité ( $f(x) = f(0) + f'(0)x + x\varepsilon(x)$ ) puis injecter cette expression dans la somme. Ensuite, séparer les cas  $f(0) \neq 0$  et  $f(0) = 0$ , puis, dans le cas  $f(0) = 0$ , revenir aux  $\varepsilon$ .
- 13 Écrire ce que l'on veut avoir («  $g(x) = f(\sqrt{x})$  ») et utiliser le théorème de prolongement de la classe  $\mathcal{C}^1$ .

- 14 Penser aux conditions pour être une bijection (en termes de monotonie) et aux conditions pour avoir la dérivabilité de la réciproque !
- 16 Appliquer  $n$  fois le théorème de Rolle (fait en cours).
- 17 Utiliser Rolle plusieurs fois et penser qu'à partir d'un certain  $n$ ,  $P^{(n)}$  est nul.
- 18
  1. Si ce n'est pas le cas, appliquer plusieurs fois le théorème de Rolle.
  2. Utiliser que si  $n$  est pair, alors la dérivée de la fonction s'annule au moins une fois.
- 19 Démontrer que cela revient à avoir l'existence d'un  $c$  tel que  $0 = f(c) - cf'(c)$ , i.e.  $c \left( \frac{f(c)}{c} - f'(c) \right) = 0$ , et appliquer le théorème de Rolle à une fonction bien choisie.
- 20 Penser au fait que si  $f^k$  a un nombre fini de zéros, après son dernier zéro elle est de signe constant, donc  $f^{(k-1)}$  est monotone...
- 21 Il s'agit uniquement d'applications du théorème ou de l'inégalité des accroissements finis.
- 22 Essayer d'encadrer  $\ln(x+1) - \ln(x)$  sur  $[n, n+1]$  à l'aide du théorème des accroissements finis.
- 23 Ressemble beaucoup à 19... Introduire  $g : x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } x \neq a, \\ 0 & \text{si } x = a. \end{cases}$
- 24
  1. Utiliser la seconde définition de la dérivée.
  2. (a)
    - (b) Montrer que  $a \neq 1$ , puis raisonner par l'absurde en supposant  $f(a) \neq 0$ .
    - (c) Utiliser la caractérisation de la borne supérieure.
- 25 Prendre  $M$  entre  $f'(a)$  et  $f'(b)$  et encadrer  $M$  entre une valeur de  $\Phi$  et une valeur de  $\Psi$ . Pour cela, penser que si  $\Phi(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell < \alpha$ , alors  $\Phi(x) < \alpha$  au voisinage de  $a$ . Ensuite appliquer le TVI à  $\Phi$  ou à  $\Psi$ .