

TD 11 Dérivabilité

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. ●●○ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* et que : $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que $\forall x > 0$, $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} P_n\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. En déduire que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Exercice 2. *Théorème de Rolle à l'infini.* ●●○ Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]0, +\infty[$ et telle que $f(0) = \lim_{+\infty} f = 0$. On souhaite démontrer qu'il existe $c \in]0, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

1. Démontrer que le résultat est trivial si f est constante.

On suppose désormais que f n'est pas constante sur \mathbb{R} . Sans perte de généralité, on peut supposer que l'on dispose de $c > 0$ tel que $f(c) > 0$.

2. Démontrer qu'il existe $a \in]0, c[$ et $b \in]c, +\infty[$ tel que $f(a) = f(b)$.
3. Conclure

Exercice 3. *Polynômes de Legendre.* ●●○ Soit n dans \mathbb{N}^* . On définit, pour tout x dans \mathbb{R} , $P_n(x) = (x^2 - 1)^n$.

1. Démontrer que pour tout $k \leq n - 1$, $P_n^{(k)}$ s'annule en -1 et en 1 .

Correction

Écrivons $P_n(x) = (x - 1)^n(x + 1)^n = f_n g_n$. Alors, par la formule de Leibniz, pour tout k , pour tout x dans \mathbb{R} .

$$P_n^{(k)} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} f_n^{(j)}(x) g_n^{(k-j)}(x).$$

Mais, si $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $f_n^{(j)}(x) = \frac{n!}{(n-j)!} (x - 1)^{n-j}$, qui s'annule en 1 , et $g_n^{(k-j)}(x) = \frac{n!}{(k-j)!} (x + 1)^{n-k+j}$, qui s'annule en -1 . Donc $P_n^{(k)}$ s'annule en -1 et en 1 .

2. Démontrer que pour tout $k \leq n$, $P_n^{(k)}$ s'annule k fois sur $] -1, 1[$.

Correction

Démontrons le résultat par récurrence sur k .

Initialisation. $P_n^{(0)} = P_n$ s'annule en -1 et en 1 .

Hérédité. Supposons que, pour un certain $k \leq n - 1$, $P_n^{(k)}$ s'annule en k points sur $] -1, 1[$, nommons ces points x_1, \dots, x_k . Alors, pour tout i dans $\llbracket 1, k - 1 \rrbracket$, $P_n^{(k)}$ est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$, dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$, s'annule en x_i et en x_{i+1} donc, d'après le théorème de Rolle, $P_n^{(k+1)}$ s'annule sur $]x_i, x_{i+1}[$. Donc $P_n^{(k+1)}$ s'annule en $k - 1$ points

de $] -1, 1[$.

De plus, $P_n^{(k)}$ s'annule en -1 et en 1 , donc, en appliquant le théorème de Rolle entre -1 et x_1 puis entre x_k et 1 , on obtient deux zéros supplémentaires de $P_n^{(k+1)}$.

Donc $P_n^{(k+1)}$ s'annule $k+1$ fois, d'où l'hérédité et le résultat !

Exercice 4. ●○○ Soit $a > 0$. Déterminer, en utilisant le théorème des accroissements finis, la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (\operatorname{Arctan}(n+a) - \operatorname{Arctan}(n)).$$

Exercice 5. La règle de L'Hôpital. ●●○

1. Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Correction

Il s'agit de ce que l'on appelle la formule des « accroissements finis généralisés ». On va donc la démontrer de manière similaire au TAF. Considérons la fonction h définie sur $[a, b]$ par

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x).$$

Alors h est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et

$$h(a) = (f(b) - f(a))g(a) - (g(b) - g(a))f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a),$$

$$h(b) = (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) = -f(a)g(b) + g(a)f(b) = h(a).$$

Donc d'après le théorème de Rolle, il existe un réel c de $]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$, i.e. tel que

$$(f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0,$$

i.e.

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

2. Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I non vide et non réduit à un point et x_0 une extrémité (finie ou non) de I . On suppose que f et g tendent vers 0 en x_0 et que g' ne s'annule pas sur $I \setminus \{x_0\}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Prouver l'implication

$$\left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \right) \implies \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \right).$$

Correction

Il faut distinguer deux cas : le cas où $x_0 \in \mathbb{R}$, et le cas où cette borne est infinie.

- Cas où $x_0 \in \mathbb{R}$. Quitte à remplacer f et g par leur prolongement par continuité en x_0 , on peut supposer f et g définies, continues, et s'annulant en x_0 . En appliquant le théorème des accroissements finis généralisé entre x_0 et $x \neq x_0$, on obtient l'existence de c_x entre x_0 et x tel que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)},$$

i.e.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Or, par encadrement, $\lim_{x \rightarrow x_0} c_x = x_0$, donc en composant les limites, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} =$

ℓ . Donc $\frac{f(x)}{g(x)}$ converge et $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

- Cas où $x_0 = +\infty$. Posons alors deux fonctions F et G , définies sur un voisinage époinché à droite 0 par $F(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ et $G(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$. Alors f et g vérifient les hypothèses du résultat précédent, et

$$\frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{-\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2} g'\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \ell.$$

On en déduit donc le résultat pour $x_0 = +\infty$!

3. Retrouver comme cas particulier le théorème de la limite de la dérivée vu en cours.

Correction

On retrouve le résultat en prenant $g(x) = x$!

4. Appliquer ce résultat aux calculs des limites suivantes

(a) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln x - 1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x} \quad (c \neq d),$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x - \sin \frac{1}{x}}{e^x - e^{1/x}}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$

Correction

Applications (on ne réécrit pas à chaque fois que les fonctions vérifient les hypothèses de la règle de l'Hôpital mais c'est important de les vérifier : est important le fait que g' soit de signe constant autour de x_0 . En effet, si

$$f(x) = x + \cos(x) \sin(x) \text{ et } g(x) = e^{\sin(x)}(x + \cos(x) \sin(x))$$

alors

$$f'(x) = 2 \cos^2(x) \text{ et } g'(x) = e^{\sin(x)} \cos(x)(x + \sin(x) \cos(x) + 2 \cos(x))$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cos(x)}{e^{\sin(x)}(x + \sin(x) \cos(x) + 2 \cos(x))} = 0,$$

mais $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{e^{\sin(x)}}$ n'admet pas de limite en $+\infty$!

(a) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln x - 1} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \sqrt{e}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a)a^x - \ln(b)b^x}{\ln(c)c^x - \ln(d)d^x} = \frac{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{\ln\left(\frac{c}{d}\right)}$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x - \sin \frac{1}{x}}{e^x - e^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos x + \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}}{e^x + \frac{1}{x^2} e^{1/x}} = \frac{\cos(1)}{e}$$

Stratégie :

- Il faut pouvoir calculer des dérivées : les exercices 6 et 7 servent à cela.
- Il faut pouvoir étudier des dérivabilités : les exercices 10, 11, 12 (prolongement de 12) sont dédiés à cela.
- Deux exercices s'appuient sur la dérivée comme développement limité à l'ordre 1 : l'exercice 8, assez simple, et l'exercice 15, beaucoup plus complexe.
- Des applications du théorème de Rolle : quelques très classiques comme 16 ou . Les exercices 17, 18 et 19 sont aussi des applications très faisables de Rolle.
- Des applications du TAF : outre 4, les exercices 21 et 22 sont assez importants. 23 est une variation.
- Quelques autres exercices intéressants comme 24 et surtout 25.

Minimum requis : exercice 6 ((a) et (d)), exercice 7 ((a) et (b)), exercice 12 **si jamais le 1 a mal été compris**, exercice 16 et 3, exercice 21.

2 Dérivabilité et définition de la dérivée – classe \mathcal{C}^n – limite de la dérivée

Exercice 6. ●○○○

Dériver les fonctions suivantes

1. $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$

2. $g : x \mapsto \sqrt[3]{\sin\left(\frac{x+1}{x+2}\pi\right)}$

3. $h : x \mapsto \ln\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x}\right)$

4. $k : x \mapsto \sqrt{\tan(x)}$.

Correction

1. $f' : x \mapsto \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$

2. $g' : x \mapsto \frac{1}{3} \left(\sin\left(\frac{x+1}{x+2}\pi\right) \right)^{-\frac{2}{3}} \times \cos\left(\frac{x+1}{x+2}\pi\right) \times \frac{\pi}{(x+2)^2}$.

3. $h' : x \mapsto \frac{4x^2 - 4x - 2}{x(x+1)(x^2 - 3x + 2)}$.

4. $k' : x \mapsto \frac{1 + \tan^2(x)}{2\sqrt{\tan(x)}}$.

Exercice 7. ●○○○

Calculer les dérivées n -ièmes des fonctions suivantes

1. $f : x \mapsto a^x$ ($a > 0$)
2. $g : x \mapsto xe^x$
3. $h : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$
4. $k : x \mapsto e^{x\sqrt{3}} \cos(x)$

Correction

1. On montre par récurrence, et en utilisant que $a^x = e^{x \ln(a)}$, que pour tout n , $f^{(n)} : x \mapsto (\ln(a))^n a^x$.
2. On montre, en utilisant la formule de Leibniz, ou par récurrence que, pour tout n , $f^{(n)} : x \mapsto ne^x + xe^x$.

3. Écrivons

$$h(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 1 + 2}{x^2 - 1} = 1 + \frac{2}{x^2 - 1} = 1 + \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1},$$

donc si $n > 0$,

$$h^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left(\frac{1}{(x - 1)^n} - \frac{1}{(x + 1)^n} \right).$$

4. Écrivons $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$. Alors pour tout réel x ,

$$k(x) = \frac{1}{2} \left(e^{x(\sqrt{3}+i)} + e^{x(\sqrt{3}-i)} \right),$$

donc

$$k^{(n)} = \frac{1}{2} \left((\sqrt{3} + i)^n e^{x(\sqrt{3}+i)} + (\sqrt{3} - i)^n e^{x(\sqrt{3}-i)} \right).$$

Or,

$$(\sqrt{3} + i)^n = 2^n e^{in\frac{\pi}{6}} \text{ et } (\sqrt{3} - i)^n = 2^n e^{-in\frac{\pi}{6}},$$

donc

$$k^{(n)}(x) = 2^n e^{\sqrt{3}x} \frac{e^{i(x+n\frac{\pi}{6})} + e^{-i(x+n\frac{\pi}{6})}}{2} = 2^n e^{\sqrt{3}x} \cos\left(x + n\frac{\pi}{6}\right).$$

Exercice 8. Démontrer que les courbes d'équation $y = x^2$ et $y = \frac{1}{x}$ admettent une unique tangente commune.

Correction

Nommons $f_1 : x \mapsto x^2$ et $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x}$, \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 leurs courbes respectives.

Soit a dans \mathbb{R} . La tangente à \mathcal{C}_1 en a a pour équation $y = a^2 + 2a(x - a) = 2ax - a^2$.

Soit b dans \mathbb{R}^* . La tangente à \mathcal{C}_2 en b a pour équation $y = \frac{1}{b} - \frac{x - b}{b^2} = \frac{2}{b} - \frac{x}{b^2}$.

Ces deux droites coïncident si et seulement si

$$\begin{cases} 2a = -\frac{1}{b^2} \\ -a^2 = \frac{2}{b} \end{cases}$$

Ce système n'est pas linéaire, on peut substituer... La première équation étant $a = -\frac{1}{2b^2}$, la seconde devient $-\frac{1}{4b^4} = \frac{2}{b}$, i.e. $b^3 = -\frac{1}{8}$, i.e. $b = -\frac{1}{2}$, et donc $a = -2$. Réciproquement $(-2, -1/2)$ est bien solution.

Donc \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 ont une unique tangente commune, c'est la droite $y = -4x - 4$.

Exercice 9. ●○○○

Que dire de la dérivée d'une fonction paire? d'une fonction impaire? d'une fonction périodique?

Correction

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

1. si f est paire alors pour tout x réel, $f(-x) = f(x)$ donc $-f'(-x) = f'(x)$ donc $f'(-x) = -f'(x)$ donc f' est impaire.
2. si f est impaire alors pour tout x réel, $f(-x) = -f(x)$ donc $-f'(-x) = -f'(x)$ donc $f'(-x) = f'(x)$ donc f' est paire.
3. si f est périodique, on dispose de $T > 0$ tel que pour tout x de \mathbb{R} , $f(x + T) = f(x)$, donc $f'(x + T) = f'(x)$, donc f' est aussi T -périodique.

Exercice 10. ●○○○

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes

1. $f : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$

2. $g : x \mapsto \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1, \\ (x-1)^3 & \text{si } x > 1. \end{cases}$

3. $h : x \mapsto x|x|$

4. $k : x \mapsto \frac{|x|}{1 + |x-1|}$

Correction

1. La fonction f est **continue** sur \mathbb{R}_+ par les théorèmes généraux, et, de même, elle est dérivable sur \mathbb{R}_+^* . Pour tout $x > 0$, $f' : x \mapsto -\frac{1}{2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$. Or, $\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$, donc $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ donc, par le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en 0 de dérivée égale à $-\frac{1}{2}$.
2. g est continue sur \mathbb{R} (notamment en 1, car les limites à gauche et à droite de g coïncident), dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $g' : x \mapsto \begin{cases} 2(x-1) & \text{si } x < 1, \\ 3(x-1)^2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$ Donc $g'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$.

donc, par le théorème de la limite de la dérivée, g est dérivable en 1 de dérivée égale à 0.

3. h est dérivable en tout réel non nul par les théorèmes généraux. Montrons qu'elle est dérivable en 0 : pour tout x réel, $\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Donc h est dérivable en 0.

4. k est dérivable en tout réel différent de 0 et 1 par les théorèmes généraux.

Étude en 0. Pour tout réel x ,

$$\frac{k(x) - k(0)}{x - 0} = \frac{\frac{|x|}{1+|x-1|}}{x} = \frac{\operatorname{sgn}(x)}{1 + |x - 1|},$$

n'a pas de limite quand x tend vers 0. Donc k n'est pas dérivable en 0.

Étude en 1. Pour tout réel x ,

$$\frac{k(x) - k(1)}{x - 1} = \frac{\frac{|x|}{1+|x-1|} - 1}{x - 1} = \frac{|x| - 1 - |x - 1|}{(1 + |x - 1|)(x - 1)}.$$

Si $x > 1$,

$$\frac{|x| - 1 - |x - 1|}{(1 + |x - 1|)(x - 1)} = \frac{x - 1 - (x - 1)}{(1 + x - 1)(x - 1)} = 0.$$

Si $0 < x < 1$,

$$\frac{|x| - 1 - |x - 1|}{(1 + |x - 1|)(x - 1)} = \frac{x - 1 - (1 - x)}{(1 + 1 - x)(x - 1)} = \frac{2}{2 - x},$$

donc $\frac{k(x) - k(1)}{x - 1}$ n'admet pas les mêmes limites à gauche et à droite en 1, donc k n'est pas dérivable en 1.

Exercice 11. ●●○

1. À quelle condition la valeur absolue d'une fonction dérivable sur \mathbb{R} est-elle dérivable ?

Correction

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Montrons que $|f|$ est dérivable si et seulement si

$$\forall a \in \mathbb{R}, f(a) = 0 \Rightarrow f'(a) = 0.$$

On montre le sens réciproque :

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Déjà, si a est dans \mathbb{R} tel que $f(a) \neq 0$, comme f est dérivable, elle est continue et on dispose de $\eta > 0$ tel que f ne s'annule pas et reste de signe constant sur $[a - \eta, a + \eta]$. Donc sur cet intervalle, f est du signe de $f(a)$. Si $f(a) > 0$, $\forall x \in [a - \eta, a + \eta]$, $|f(x)| = f(x)$, dérivable, donc dérivable en a . Si $f(a) < 0$, $\forall x \in [a - \eta, a + \eta]$, $|f(x)| = -f(x)$, dérivable, donc dérivable en a .

Maintenant, si $f(a) = 0$, alors $f'(a) = 0$, donc on dispose de ε qui tend vers 0 quand x tend vers a telle que pour tout x dans \mathbb{R} ,

$$f(x) = 0 + 0 \times (x - a) + \varepsilon(x) \times (x - a),$$

donc $|f(x)| = |\varepsilon(x)| |x - a| = (x - a) |\varepsilon(x)| \eta(x)$, avec $\eta(x) = 1$ si $x - a > 0$ et -1 si $x - a < 0$. Donc $|\varepsilon(x)| \eta(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, donc $|f|$ est dérivable en a de dérivée nulle !

Sens direct : on montre la contraposée :

Supposons que $|f|$ est dérivable sur \mathbb{R} . Soit a tel que $f(a) = 0$. Comme $|f|$ est toujours positive, a est alors un minimum local de $|f|$ atteint à l'intérieur de l'intervalle considéré (on s'est placé sur \mathbb{R}), donc $|f|'(a) = 0$. On dispose alors de $\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ et que pour tout x dans \mathbb{R} ,

$$|f(x)| = (x - a)\varepsilon(x).$$

Mais alors si on prend η la fonction égale au signe de f (et nulle quand f est nulle), on a pour tout x dans \mathbb{R} , $f(x) = (x - a)\varepsilon(x)\eta(x)$, avec, comme η est bornée, $\varepsilon(x)\eta(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$. Donc $f'(a) = 0$. D'où le résultat !

2. À quelle condition le maximum de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} est-il dérivable ?

Correction

Soient f et g deux fonctions dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Alors $\max(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2}$, donc $\max(f, g)$ est dérivable ssi $|f - g|$ est dérivable, donc ssi

$$\forall a \in \mathbb{R}, f(a) = g(a) \Rightarrow f'(a) = g'(a).$$

Exercice 12. ●●○ Soit f définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , et représenter le graphe de f .

Correction

On remarque que si on pose $g : x \mapsto \begin{cases} e^{\frac{1}{2(x-1)}} & \text{si } x < 1, \\ 0 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$ et $h : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{2(x+1)}} & \text{si } x > -1, \\ 0 & \text{si } x \leq -1. \end{cases}$, alors $f = gh$. Or on a démontré en cours, par récurrence, le caractère \mathcal{C}^∞ de $k : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$, d'où celui de g et h et celui de f . On obtient une fonction \mathcal{C}^∞ à support inclus dans un segment (i.e. nulle en-dehors de $[0, 1]$)

Exercice 13. ●●○ Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} telle que $f'(0) = 0$.

Montrer qu'il existe une fonction g de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} telle que pour tout réel x positif on ait $f(x) = g(x^2)$.

Exercice 14. ●●○ Soit, pour λ et μ dans \mathbb{R} , $\varphi_{\lambda,\mu} : x \mapsto e^x + \lambda e^{-x} + \mu x$. Déterminer une CNS sur λ et μ pour que $\varphi_{\lambda,\mu}$ soit une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} dont la bijection réciproque est \mathcal{C}^1 .

Correction

Condition nécessaire. On suppose que λ et μ sont choisis de sorte que $\varphi_{\lambda,\mu}$ soit une bijection \mathcal{C}^1 de bijection réciproque \mathcal{C}^1 . Alors

- $\varphi_{\lambda,\mu}$ est strictement monotone. Or, pour tout x dans \mathbb{R} ,

$$\varphi'_{\lambda,\mu}(x) = e^x - \lambda e^{-x} + \mu.$$

- Si $\lambda > 0$, alors $\varphi'_{\lambda,\mu}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\varphi'_{\lambda,\mu}(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$, donc $\varphi'_{\lambda,\mu}$ change strictement de signe, donc $\varphi_{\lambda,\mu}$ change strictement de variations. C'est absurde !
- Si $\lambda = 0$, alors $\varphi'_{\lambda,\mu} : x \mapsto e^x + \mu$, qui change strictement de signe dès lors que $\mu < 0$. Donc, nécessairement, $\boxed{\text{si } \lambda = 0, \mu \geq 0}$.
- Si $\lambda < 0$, écrivons $\lambda = -\xi$, alors on étudie le signe de $\varphi'_{\lambda,\mu}$, en étudiant ses variations. Pour tout x dans \mathbb{R} ,

$$\varphi''_{\lambda,\mu}(x) = e^x + \lambda e^{-x}.$$

Alors on a les équivalences suivantes :

$$\varphi''_{\lambda,\mu}(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq -\lambda e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} \geq \xi \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2} \ln(\xi).$$

Le minimum de $\varphi'_{\lambda,\mu}$ est donc atteint en $\frac{1}{2} \ln(\xi)$, et il vaut alors

$$\varphi'_{\lambda,\mu}\left(\frac{1}{2} \ln(\xi)\right) = e^{\frac{1}{2} \ln(\xi)} - \lambda e^{-\frac{1}{2} \ln(\xi)} + \mu = \sqrt{\xi} - \frac{1}{\sqrt{\xi}} + \mu = \frac{\xi - 1 + \mu\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}.$$

On étudie alors le polynôme $X^2 + \mu X - 1$: son signe donnera la relation devant être vérifiée entre μ et ξ . Le discriminant du polynôme est $\mu^2 + 4 > 0$, d'où deux racines : $\frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4}}{2}$. Donc si $\lambda < 0$, le minimum de $\varphi'_{\lambda,\mu}$ est atteint en un réel positif (ou nul) si et seulement si

$$\sqrt{\xi} \notin \left[\frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 + 4}}{2}, \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 + 4}}{2} \right],$$

mais, comme $\xi > 0$, la condition se réécrit $\sqrt{\xi} \geq \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 + 4}}{2}$, ou encore $\xi \geq \frac{(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 4})^2}{4}$, ou encore

$$\lambda \leq -\frac{(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 4})^2}{4}$$

Exercice 15. ●●●

1. Soit f dérivable en 0. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ existe et la déterminer (on reviendra à la définition de la dérivabilité en termes de développement limité).

Correction

f est dérivable en 0 donc on dispose d'une fonction ε tendant vers 0 en 0 et d'un voisinage V de 0 tels que

$$\forall x \in V, f(x) = f(0) + f'(0)x + x\varepsilon(x).$$

Or, pour tout k dans $\{0, \dots, n\}$, $\frac{k}{n^2} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc, pour n assez grand, $0, \frac{1}{n^2}, \dots, \frac{1}{n}$

sont dans V . Donc

$$\sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \sum_{k=0}^n \left[f(0) + f'(0) \left(\frac{k}{n^2}\right) \left(1 + \varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)\right) \right]$$

On va supposer ici $f(0) = 0$ (sinon la limite sera infinie). Donc

$$\sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) = f'(0) \sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2} \left(1 + \varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)\right).$$

Nommons ε_n le maximum de $|\varepsilon|$ sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$. Afin de manipuler les inégalités, supposons $f'(0) \geq 0$. On en déduit que

$$f'(0) \sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2} (1 - \varepsilon_n) \leq \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq f'(0) \sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2} (1 + \varepsilon_n),$$

i.e.

$$f'(0) \frac{n(n+1)}{2n^2} (1 - \varepsilon_n) \leq \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq f'(0) \frac{n(n+1)}{2n^2} (1 + \varepsilon_n),$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit, par encadrement, que $\sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ converge vers $\frac{f'(0)}{2}$.

2. Application : montrer que $\prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.

Correction

Posons $P_n = \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ et $S_n = \ln(P_n)$. Alors $S_n = \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$. Donc S_n converge vers la dérivée en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$, i.e. vers $\frac{1}{2}$.

3 Théorèmes globaux

3.1 Théorème de Rolle

Exercice 16. ●●○ Montrer que pour tout n dans \mathbb{N} , pour toute $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, si f est n fois dérivable sur $[0, 1]$ et si f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[0, 1]$, alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $[0, 1]$.

Correction

Soit n dans \mathbb{N}^* . Soit f dérivable n fois sur $[0, 1]$, $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ les points d'annulation de f . On montre par récurrence sur $k \leq n$ que $f^{(k)}$ s'annule $n+1-k$ fois sur $[0, 1]$.

L'initialisation est donnée par l'exercice.

Hérédité. On suppose que $f^{(k)}$ s'annule $n+1-k$ fois sur $[0, 1]$ pour un certain $k \leq n-1$.

Soient $b_0 < \dots < b_{n-k}$ ces points d'annulation. Alors pour tout i dans $\llbracket 0, n-k-1 \rrbracket$, $f^{(k)}$ est continue sur $[b_i, b_{i+1}]$, dérivable sur $]b_i, b_{i+1}[$ et $f^{(k)}(b_i) = f^{(k)}(b_{i+1})$ donc, d'après le théorème de Rolle, on dispose de c_i dans $]b_i, b_{i+1}[$ tel que $f^{(k+1)}(c_i)$ s'annule. On a donc trouvé $n+1-(k+1)$ points $b_0 < c_0 < b_1 < \dots < c_{n-k-1} < b_{n-k}$ d'annulation de $f^{(k+1)}$.
D'où l'hérédité et le résultat par récurrence, en particulier pour $k = n$.

Exercice 17. ●●○

Soit P un polynôme. Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ n'admet qu'un nombre fini de solutions sur \mathbb{R} .

Correction

Soit n le degré de P . Supposons que $f : x \mapsto e^x - P(x)$ s'annule au moins $n+2$ fois sur \mathbb{R} . Alors, par l'exercice 16, la dérivée $n+1$ -ième de f s'annule au moins une fois sur \mathbb{R} . Or la dérivée $n+1$ -ième de P est nulle, donc $x \mapsto e^x$ s'annule au moins une fois sur \mathbb{R} , c'est absurde.
Donc l'équation admet au plus $n+2$ solutions (en particulier c'est un nombre fini).

Exercice 18. ●●○ Soient a et b deux réels, n un entier supérieur ou égal à 2. On considère $P : x \mapsto x^n + ax + b$.

1. Montrer que P s'annule au plus 3 fois sur \mathbb{R} .

Correction

Posons k le nombre de zéros de P . Alors, comme P est continu donc dérivable sur \mathbb{R} , par le théorème de Rolle appliqué entre chacune des racines de P , P' s'annule $k-1$ fois. De même, P'' s'annule $k-2$ fois sur \mathbb{R} , i.e. $xn(n-1) \mapsto x^{n-2}$ d'annule $k-2$ fois sur \mathbb{R} . Or $x \mapsto x^{n-2}$ s'annule au plus 1 fois sur \mathbb{R} , donc $k-2 \leq 1$, donc $k \leq 3$. D'où le résultat.

2. Montrer que si n est pair, P s'annule au plus 2 fois sur \mathbb{R} .

Correction

Si de plus n est pair, nommons toujours k le nombre de zéros de P . Alors par les mêmes arguments que précédemment, P' s'annule $k-1$ fois sur \mathbb{R} , i.e. $x \mapsto nx^{n-1} + a$ s'annule $k-1$ fois sur \mathbb{R} . Comme n est pair, $n-1$ est impair donc $x \mapsto nx^{n-1} + a$ est strictement croissante sur \mathbb{R} , donc s'annule au plus une fois sur \mathbb{R} . Donc $k-1 \leq 1$, donc $k \leq 2$.

Exercice 19. ●●○ Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable, telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et $\exists a > 0, f(a) = 0$. Montrer qu'il existe un point de la courbe de f , différent de l'origine, où la tangente passe par l'origine du repère.

Correction

Traduisons analytiquement la condition géométrique décrite. Soit c dans \mathbb{R}_+ . L'équation de la tangente à la courbe de f en c est $y = f(c) + f'(c)(x - c)$. Demander à ce que cette droite passe par 0, c'est demander que $0 = f(c) - cf'(c) = c \left(\frac{f(c)}{c} - f'(c) \right)$. Cela incite

à considérer la fonction g définie sur \mathbb{R}_+ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0$, donc g est continue en 0. Donc g est continue sur $[0, a]$, dérivable sur $]0, a[$, et $g(0) = 0$, $g(a) = 0$. Donc d'après le théorème de Rolle, g s'annule en un point c de $]0, a[$. Or,

$$g'(c) = \frac{f'(c)c - f(c)}{c^2},$$

donc $f'(c)c - f(c) = 0$, ce qui correspond exactement à la condition trouvée! D'où le résultat.

Exercice 20. ●●● Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ et bornée.

1. Montrer que si une dérivée $f^{(k)}$ admet un nombre fini de zéros, alors les dérivées précédentes $f^{(p)}$, $1 \leq p < k$ tendent vers 0 en $\pm\infty$.
2. Rappeler le théorème de Rolle à l'infini.
3. En déduire que, pour $k \geq 2$, $f^{(k)}$ s'annule au moins $k - 1$ fois.

3.2 Théorème et inégalité des accroissements finis

Exercice 21. ●○○

Montrer les inégalités suivantes

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\operatorname{Arctan}(x) - \operatorname{Arctan}(y)| \leq |x - y|$
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+, x \leq e^x - 1 \leq xe^x$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \operatorname{ch}(x) - 1 \leq x \operatorname{sh}(x)$

Correction

1. Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x)$. Alors f est dérivable sur \mathbb{R} et $f' : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. En particulier, pour tout x de \mathbb{R} , $|f'(x)| \leq 1$, donc, d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous x et y dans \mathbb{R} , $|\operatorname{Arctan}(x) - \operatorname{Arctan}(y)| \leq |x - y|$.
2. On pose $f : x \mapsto e^x$. Alors f est dérivable sur \mathbb{R} . Soit x dans \mathbb{R}_+^* . En appliquant le théorème des accroissements finis entre 0 et x , on dispose de c dans $]0, x[$ tel que $e^x - 1 = f'(c)(x - 0) = e^c x$. Or, $0 \leq x \leq c$ donc $1 \leq e^c \leq e^x$, donc

$$x \leq e^x - 1 \leq xe^x.$$

3. Soit x un réel positif. La fonction ch est continue sur $[0, x]$, dérivable sur $]0, x[$, de dérivée égale à sh , donc, d'après le théorème des accroissements finis, on dispose de c dans $]0, x[$ tel que

$$\operatorname{ch}(x) - 1 = \operatorname{sh}(c)x.$$

Si $x \geq 0$, $0 \leq \operatorname{sh}(c) \leq \operatorname{sh}(x)$, donc, comme $x \geq 0$, $0 \leq x\operatorname{sh}(c) \leq x\operatorname{sh}(x)$, donc $0 \leq \operatorname{ch}(x) - 1 \leq x\operatorname{sh}(x)$.

Si $x \leq 0$, $x \leq \operatorname{sh}(c) \leq 0$, donc, comme $x \leq 0$, $0 \leq x\operatorname{sh}(c) \leq x\operatorname{sh}(x)$, donc $0 \leq \operatorname{ch}(x) - 1 \leq x\operatorname{sh}(x)$.

D'où le résultat.

Exercice 22. *Série harmonique – le retour.* ●○○ En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}.$$

En déduire (pour la $n+1$ -ième fois) que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k} = +\infty$, et déterminer, si elle existe, la limite

quand n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

Correction

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Appliquons le théorème des accroissements finis entre x et $x+1$: on dispose de $c_x \in]x, x+1[$ tel que $\ln(x+1) - \ln(x) = \frac{1}{c_x}$ (la dérivée de \ln en c_x). Or, $x \leq c_x \leq x+1$

donc $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{c_x} \leq \frac{1}{x}$, donc $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$. Donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln(k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ d'où le résultat !

Exercice 23. ●●○ Soit f une fonction dérivable d'un segment $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On suppose que $f(a) = f(b)$ et que $f'(a) = 0$. Montrer qu'il existe c dans $]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

Correction

Ici, on ne peut pas directement appliquer le théorème des accroissements finis ! Considérons

la fonction

$$g : x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } x \neq a, \\ 0 & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = f'(a) = 0$, donc g est définie et continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et $g(a) = 0$, $g(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$. Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe c dans $]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or, pour tout x dans $]a, b[$,

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x - a) - (f(x) - f(a))}{(x - a)^2}.$$

Donc

$$\frac{f'(c)(c - a) - (f(c) - f(a))}{(c - a)^2} = 0,$$

i.e.

$$f'(c)(c - a) = f(c) - f(a),$$

donc, comme $c \neq a$,

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

D'où le résultat.

4 Autres exercices

Exercice 24. *Vers de l'analyse un peu fine.* ●●○

Soit f une fonction continûment dérivable de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , telle que $\begin{cases} f(0) = 0, \\ f'(0) = 1, \\ f(1) < 0. \end{cases}$

On veut montrer qu'il existe un « premier temps de retour à 0 », c'est-à-dire qu'il existe un réel a de $[0, 1]$ tel que

$$f(a) = 0 \text{ et } \forall 0 < x < a, f(x) \neq 0.$$

1. Montrer qu'il existe un réel δ tel que $\forall x \in]0, \delta[, f(x) > 0$.

Correction

f est dérivable en 0 de dérivée égale à 1, donc on dispose d'une fonction ε définie au voisinage de 0, V , tendant vers 0 en 0, telle que

$$\forall x \in V, f(x) = f(0) + f'(0)x + x\varepsilon(x) = x(1 + \varepsilon(x)).$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$, on dispose de $\delta_0 > 0$ tel que pour tout $x \in]0, \delta_0[, |\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{2}$.

Pour x dans $]0, \delta_0[$, on a alors $1 + \varepsilon(x) \geq \frac{1}{2}$, donc $x(1 + \varepsilon(x)) \geq \frac{x}{2} > 0$, i.e. $f(x) > 0$.

2. Considérons alors l'ensemble $A = \{\delta \in]0, 1[, \forall x \in]0, \delta[, f(x) > 0\}$.

(a) Justifier que A a une borne supérieure, appelons-la a .

Correction

L'ensemble A est une partie de \mathbb{R} non vide (il contient δ_0), majorée. Donc A admet une borne supérieure.

(b) Montrer que $f(a) = 0$.

Correction

Déjà, $f(1) < 0$ donc nécessairement $a \neq 1$.
Si $f(a) \neq 0$, supposons $f(a) > 0$. f est continue en a donc il on dispose de $\eta > 0$ tel que pour tout x de $]a - \eta, a + \eta[$, $f(x) > 0$. Donc $a + \frac{\eta}{2} \in A$, c'est absurde.
Donc $f(a) = 0$.

(c) Montrer que $\forall x \in]0, a[$, $f(x) > 0$, et conclure.

Correction

Soit $x \in]0, a[$. Posons $\varepsilon = a - x > 0$. Alors par les propriétés de la borne supérieure, on dispose d'un élément δ de A tel que $a - \delta < \varepsilon$, i.e. $x < \delta < a$. Donc, par définition de δ , $f(x) > 0$.
On en déduit que $f(a) = 0$ et que $\forall x \in]0, a[$, $f(x) > 0$.

Exercice 25. ●●● Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable. On définit

$$\Phi : \begin{cases} [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases} \end{cases} \quad \text{et} \quad \Psi : \begin{cases} [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} & \text{si } x \neq b \\ f'(b) & \text{si } x = b \end{cases} \end{cases}$$

1. En étudiant les fonctions Φ et Ψ , montrer que f' prend toutes les valeurs du segment d'extrémités $f'(a)$ et $f'(b)$.

Ainsi, f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.

Correction

Premier point, Φ et Ψ sont clairement continues sur $[a, b]$ par définition de la dérivabilité de f .

Ensuite, on peut supposer, sans perte de généralité, $f'(a) < f'(b)$.

On remarque que le point $\tau = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est un point important, car c'est une valeur atteinte par Φ et Ψ . On distingue alors trois cas !

- $f'(a) \leq \tau \leq f'(b)$: en fonction d'où est M (dans $[f'(a), \tau]$ ou $[\tau, f'(b)]$), on peut faire un TVI sur Φ ou Ψ

Soit alors M dans $]f'(a), f'(b)[$ (on peut prendre le segment ouvert car sinon c'est évident!).

On sait que $\Phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a) < M$ donc on dispose de $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [a, a + \eta]$, $\Phi(x) < M$.

On sait que $\Psi(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} f'(b) > M$ donc on dispose de $\eta' > 0$ tel que $\forall x \in [b - \eta', b]$, $\Psi(x) > M$.

Ensuite, M se situe entre $\Phi(a + \eta)$ et $\Psi(b - \eta')$. De plus, $\Phi(b) = \Psi(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Donc, nécessairement, M est ou supérieur ou inférieur à cette quantité, i.e.

- ou bien $\Phi(a + \eta) < M \leq \Phi(b)$
- ou bien $\Psi(a) \leq M < \Psi(b - \eta)$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que l'on est dans la première situation. Alors par continuité de Φ et par le théorème des valeurs intermédiaires, on dispose de α dans $[a + \eta, b]$ tel que $M = \Phi(\alpha)$, i.e. $M = \frac{f(\alpha) - f(a)}{\alpha - a}$. Maintenant, par le théorème des accroissements finis, on dispose de c dans $]a, \alpha[$ tel que $\frac{f(\alpha) - f(a)}{\alpha - a} = f'(c)$, i.e. $M = f'(c)$. Le résultat est donc démontré !

2. Pourquoi ne peut-on pas appliquer le TVI sur f' ?

Correction

Simplement parce que f n'est que dérivable : rien ne nous dit que f' est continue !

Indications.

- 6 Calculs directs. Ne pas hésiter, quand il y a une dérivée compliquée, à l'écrire sous la forme $f \circ g \circ h$ et à expliciter sa dérivée à l'aide de la règle de la chaîne.
- 7
 1. Récurrence évidente.
 2. Utiliser la formule de Leibniz sur $g : x \mapsto xe^x$
 3. Essayer d'exprimer h simplement, en écrivant $x^2 + 1 = 2 + x^2 - 1$, puis en écrivant $\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1}$ avec a et b à déterminer.
- 8 **ATTENTION !** La tangente commune n'est pas tangente aux deux courbes **au même point**. Un conseil : écrire l'équation de la tangente à la courbe de $x \mapsto x^2$ en $a \in \mathbb{R}$ et l'équation de la tangente à la courbe de $x \mapsto \frac{1}{x}$ en $b \in \mathbb{R}^*$, puis égaliser les deux équations de tangentes.
- 9 Écrire les définitions, et dériver les égalités en faisant attention aux fonctions composées.
- 10 Utiliser les théorèmes généraux pour toutes les fonctions non problématiques, puis utiliser le théorème de la limite de la dérivée ou bien le taux de variations.
- 11
 1. Montrer que $|f|$ est dérivable si et seulement si $\forall a \in \mathbb{R}, f(a) = 0 \Rightarrow f'(a) = 0$. (en montrant la réciproque, puis la contraposée du sens direct)
 2. Utiliser les expressions du maximum et du minimum à l'aide de la valeur absolue !
- 12 Remarquer que $\frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + x}$ et utiliser l'exercice 1.
- 15 Utiliser la seconde définition de la dérivabilité ($f(x) = f(0) + f'(0)x + x\varepsilon(x)$) puis injecter cette expression dans la somme. Ensuite, séparer les cas $f(0) \neq 0$ et $f(0) = 0$, puis, dans le cas $f(0) = 0$, revenir aux ε .
- 13 Écrire ce que l'on veut avoir (« $g(x) = f(\sqrt{x})$ ») et utiliser le théorème de prolongement de la classe \mathcal{C}^1 .

- 14 Penser aux conditions pour être une bijection (en termes de monotonie) et aux conditions pour avoir la dérivabilité de la réciproque !
- 16 Appliquer n fois le théorème de Rolle (fait en cours).
- 17 Utiliser Rolle plusieurs fois et penser qu'à partir d'un certain n , $P^{(n)}$ est nul.
- 18 **1.** Si ce n'est pas le cas, appliquer plusieurs fois le théorème de Rolle.
2. Utiliser que si n est pair, alors la dérivée de la fonction s'annule au moins une fois.
- 19 Démontrer que cela revient à avoir l'existence d'un c tel que $0 = f(c) - cf'(c)$, i.e. $c \left(\frac{f(c)}{c} - f'(c) \right) = 0$, et appliquer le théorème de Rolle à une fonction bien choisie.
- 20 Penser au fait que si f^k a un nombre fini de zéros, après son dernier zéro elle est de signe constant, donc $f^{(k-1)}$ est monotone...
- 21 Il s'agit uniquement d'applications du théorème ou de l'inégalité des accroissements finis.
- 22 Essayer d'encadrer $\ln(x+1) - \ln(x)$ sur $[n, n+1]$ à l'aide du théorème des accroissements finis.
- 23 Ressemble beaucoup à 19... Introduire $g : x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } x \neq a, \\ 0 & \text{si } x = a. \end{cases}$
- 24 **1.** Utiliser la seconde définition de la dérivée.
2. (a)
(b) Montrer que $a \neq 1$, puis raisonner par l'absurde en supposant $f(a) \neq 0$.
(c) Utiliser la caractérisation de la borne supérieure.
- 25 Prendre M entre $f'(a)$ et $f'(b)$ et encadrer M entre une valeur de Φ et une valeur de Ψ . Pour cela, penser que si $\Phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell < \alpha$, alors $\Phi(x) < \alpha$ au voisinage de a . Ensuite appliquer le TVI à Φ ou à Ψ .