N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Chapitre 12
Convexité

1 Définitions de base

1.1 Moyenne de deux points et droites

Proposition 1

Soient x et y deux réels tels que $x < y$.

(i) Pour tout λ dans $[0, 1]$, $(1-\lambda)x + \lambda y$ appartient au segment $[x, y]$.

(ii) Pour tout z dans $[x, y]$, il existe un unique λ dans $[0, 1]$ tel que $z = (1-\lambda)x + \lambda y$.

On dit que z est combinaison convexe de x et y.

Proposition 2

Soit f une fonction affine. Alors pour tous réels $x < y$, pour tout λ dans $[0, 1]$,

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) = (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Exercice 3

Démontrer que la propriété précédente caractérise les fonctions affines. Plus précisément, on prend f vérifiant :

$$\forall \lambda \in [0, 1],\ f((1-\lambda)x + \lambda y) = (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

(i) démontrer que pour tous a, b, c tels que $a < c < b$,

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

(ii) en déduire que pour tous x dans $\mathbb{R}$, $f(x) = f(0) + x(f(1) - f(0))$ et conclure.

1.2 Définition de la convexité

Définition 4

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. On dit que f est convexe sur I si

$$\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2,\ \forall \lambda \in [0, 1],\ f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Une fonction f est concave sur I si

$$\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2,\ \forall \lambda \in [0, 1],\ f((1-\lambda)x + \lambda y) \geqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

On dit qu'elle est strictement convexe (ou concave) si l'inégalité est stricte.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

2 Aspects géométriques

2.1 Lien avec la définition

Proposition 5

Une fonction est convexe (respectivement concave) si et seulement si son graphe est toujours en-dessous (respectivement au-dessus) de ses cordes.

Proposition 6

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Le graphe de f est au-dessus de ses sécantes dans la zone extérieure à la corde.

Proposition 7 (Inégalité des pentes)

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$.
Alors f est convexe si et seulement si pour tous réels (a, b, c) de I tels que $a < c < b$,

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

Dans le cas strictement convexe, on met des inégalités strictes.

Corollaire 8

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, $x \in \mathbb{R}$. Alors l'application « pente issue de x » ,

$$\tau_x : \left| \begin{array}{rcl} \mathrm{I} \setminus \{x\} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \end{array} \right.$$

est croissante.

2.2 Régularité supérieure

Proposition 9

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, convexe. Alors f admet des dérivées à gauche et à droite en tout point intérieur à I. En particulier, elle est continue à l'intérieur de I.

Proposition 10

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, dérivable. Les ASSE

(i) f est convexe

(ii) f' croît (et, donc, si f est $\mathscr{C}^2$, $f'' \geqslant 0$)

(iii) f est au-dessus de ses tangentes

Dans le cas strictement convexe, on remplace « f' croît » par « f croît strictement ».

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Définition 11

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathrm{I}$. On dit que a est un point d'inflexion de f si f est localement concave puis convexe. Si $f \in \mathcal{D}^2$, il s'agit d'un zéro de f'' avec changement de signe.

3 Inégalité de Jensen

Proposition 12

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors pour tous $(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{I}^n$, pour tous $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0,1]^n$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Si f est concave, on inverse l'inégalité.