N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

Le but de ce chapitre est de donner des méthodes et des résultats utiles pour l'étude des suites du type

$$\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I}, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \tag{R}$$

Dans tout le chapitre f est une fonction de $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Point de méthode 1

La **PREMIÈRE CHOSE** à faire dans ce genre d'étude est, si on le peut, de représenter la fonction f et la première bissectrice : une bonne représentation permet de conjecturer les majorations/minorations à établir sur (u_n) ainsi que son sens de variations.

1 Premiers résultats : définition, intervalles stables

Point de méthode 2

Pour démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on démontre par récurrence la proposition

$$u_n \text{ est définie et } u_n \in J. \tag{$\mathcal{P}_n$}$$

où J est un intervalle inclus dans l'ensemble de définition de f.

Exemple 3

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n - 1} + 1$.
Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est effectivement bien définie. On démontre la proposition

$$u_n \text{ est définie et } u_n > 1 \tag{$\mathcal{P}_n$}$$

Initialisation. u_0 existe et $u_0 > 1$ par hypothèse.
Hérédité. soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n est défini et $u_n > 1$.
Alors $u_n - 1 > 0$ donc $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 1} + 1$ est définie.
Or, $\sqrt{u_n - 1} > 0$, donc $u_{n+1} > 1$. D'où l'hérédité, et le résultat !

2. Attention à l'intervalle à considérer. Ainsi, si on prend $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2\cos(u_n)}$, démontrons que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n$ est définie.
On pourrait vouloir montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, mais cette condition est trop molle pour être héréditaire. On va démontrer un résultat plus restreint.

$$u_n \text{ est définie et } u_n \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]. \tag{$\mathcal{P}_n$}$$

Initialisation. u_0 est définie et est nulle, donc dans $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n est défini et $u_n \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$, alors $\cos(u_n) \in \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Donc $1 \leqslant \dfrac{1}{\cos(u_n)} \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{2}}$,
donc $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{2\cos(u_n)} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,
donc, comme $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \dfrac{\pi}{4}$ (car $\pi^2 > 8$, donc $\dfrac{\pi^2}{16} \geqslant \dfrac{1}{2}$)
donc u_{n+1} est définie et est dnas $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.
D'où l'hérédité et le résultat.

Remarque 4

L'idée est donc de trouver des intervalles stables par f, i.e. des parties D de I telles que $f(D) \subset D$.

2 Variations

Point de méthode 5

La méthode **de base** pour déterminer les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est d'étudier la fonction

$$g : x \mapsto f(x) - x.$$

Si D est une partie stable par f, si $u_0 \in D$ et si $\forall x \in \mathscr{D}$, le signe de D est constant, alors on connaît les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 6

Étudier la suite définie par $u_0 \geqslant 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{3+2u_n}$.
Par récurrence immédiate, u_n est toujours positive : $\mathbb{R}_+$ est stable par f.
On étudie ensuite la fonction f, croissante. Quand on la représente, on remarque que $f(3) = 3$, et que c'est son seul point fixe. On remarque aussi que la fonction est sous ce point fixe avant 3 et au-dessus après 3.
Étudions alors $g : x \mapsto f(x) - x = \sqrt{3+2x} - x$. Si $x \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$ si et seulement si $3 + 2x \geqslant x^2$, i.e. ssi $(x-3)(x+1) \leqslant 0$, i.e. ssi $x \leqslant 3$. Donc g est positive avant 3, négative après.
De plus, on démontre que $u_0 \leqslant 3 \Rightarrow \forall n,\ u_n \leqslant 3$ et que $u_0 \geqslant 3 \Rightarrow \forall n,\ u_n \geqslant 3$.
Donc si $u_0 \leqslant 3$, (u_n) est croissante majorée donc converge, et si $u_0 \geqslant 3$, (u_n) est décroissante minorée donc converge.

Une autre proposition peut être utile pour déterminer les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **mais** elle est hors-programme.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Proposition 7 (HP)

Si $f : \mathrm{I} \to \mathrm{I}$ et f est croissante, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, sa monotonie étant dictée par le signe de la première différence :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît si $u_1 - u_0 \geqslant 0$,
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît si $u_1 - u_0 \leqslant 0$.

Remarque 8

Cette propriété permet, dans un cas concret, d'éviter d'étudier en détail $x \mapsto f(x) - x$.

Démonstration

On suppose que $u_0 \leqslant u_1$ et on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}$.
Initialisation. Par hypothèse, $u_0 \leqslant u_1$.
Hérédité. On suppose $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour un certain n. Alors, par croissance de f, $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$, donc $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.
D'où l'hérédité et le résultat. ■

Proposition 9 (HP)

Si f est décroissante, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas, monotone (sauf si elle est constante). En revanche $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, de monotonies contraires.

Démonstration

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = f(u_{n+1}) = f \circ f(u_n)$, donc

$$u_{2(n+1)} = f \circ f(u_{2n}) \text{ et } u_{2(n+1)+1} = f \circ f(u_{2n+1}),$$

donc, comme f est décroissante, $f \circ f$ est croissante, donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.
De plus, si $u_{2n} \leqslant u_{2(n+1)}$, alors en composant par f,

$$u_{2n+1} \geqslant u_{2(n+1)+1},$$

donc les suites sont de monotonies opposées. ■

Exemple 10

Étudier la suite $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

3 Utilisation de la régularité de la fonction

Proposition 11

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{I}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathrm{I}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a \in \mathrm{I}$, si f est continue en a, alors a est un point fixe de f.

Démonstration

Si $u_n \underset{n}{\longrightarrow} +\infty a$, $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ car (u_{n+1}) est extraite de (u_n).
Par continuité de f en a, $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$, donc $a = f(a)$ par passage à la limite dans l'égalité. ■

Remarque 12

1. Cette proposition doit être utilisée pour déterminer les candidats possibles pour être limite de (u_n).
2. Exemple : étudier $u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n} - 1$.

Proposition 13

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{I}$ k-contractante. Alors f admet au plus un point fixe.

Démonstration

Soient x et y deux points fixes de f. Alors $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$. Donc

$$|x - y| \leqslant k|x - y|,\ \text{donc } (1 - k).|x - y| \leqslant 0.$$

Comme $1 - k \geqslant 0$, $|x - y| \leqslant 0$ donc $|x - y| = 0$, donc $x = y$. ■

Remarque 14

1. Une fonction contractante n'a pas nécessairement de point fixe, par exemple $x \mapsto \dfrac{x}{2}$ sur $]0, 1[$.
2. En revanche, si f est continue $[a, b] \to [a, b]$, elle admet un point fixe.
3. On a même, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, k-contractante, f admet un point fixe.

Proposition 15

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{I}$, k-contractante, admettant un point fixe $a \in \mathrm{I}$. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pas $u_0 \in \mathrm{I}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers a, et sa convergence est (sous-)géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - a| \leqslant k^n |u_0 - a|.$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$|u_{n+1} - a| = |f(u_n) - a| = |f(u_n) - f(a)| \leqslant k.|u_n - a|.$$

Donc, par récurrence immédiate,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - a| \leqslant k^n |u_0 - a| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

■