 nlaillet.math@gmail.com

Chapitre 14
Matrices

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps. En pratique, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Définitions et opérations sur les matrices

1.1 Définitions

Définition 1

1. Une *matrice* à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un élément A de $\mathbb{K}^{np}$. On présente cet élément sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

On note aussi $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$. Les a_{ij} sont appelés coefficients de A.

2. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la matrice $L_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix}$ est appelée i-ème ligne de A.

Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, la matrice $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ est appelée j-ème colonne de A.

3. L'ensemble des matrices à n lignes et à p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

4. Les éléments de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ sont appelés vecteurs (ou matrices) lignes ; ceux de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont appelés vecteurs (ou matrices) colonnes.

5. Dans le cas où $n = p$, on note simplement $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et on parle de matrices carrées. Pour $A = (a_{ij}))1 \leqslant i, j \leqslant n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la *diagonale* de A est le n-uplet $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

Définition 2 (Matrices particulières)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On dit que A est triangulaire supérieure si $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$. On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.

2. On dit que A est triangulaire inférieure si $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$. On note $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.

3. On dit que A est diagonale si $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$. On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales.

4. On dit que A est scalaire si elle est diagonale et s'il existe λ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a_{ii} = \lambda$.

5. On nomme matrice identité, et on note I_n la matrice constituée uniquement de 1 : $\mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$.

Définition 3 (Un symbole utile : le symbole de Kronecker)

Si $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, on définit $\delta_{a,b} = \begin{cases} 1 \text{ si } a = b \\ 0 \text{sinon} \end{cases}$

1.2 Addition et multiplication par un scalaire

Définition 4

1. On définit pour deux matrices $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la somme A et B par
$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}.$$
Autrement dit,
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1p}+b_{1p} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2p}+b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{np}+b_{np} \end{pmatrix}$$
2. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit la matrice λA par $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$, c'est-à-dire
$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1p} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{np} \end{pmatrix}$$

Proposition 5 (et def)

1. Si l'on note $0_{np} = (0)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$, alors pour toute A dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$.
2. $+$ est commutative.
3. $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A + (-A) = 0_{n,p}$.
4. $\forall (A, B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ et $(\lambda\mu).A = \lambda.(\mu A)$.
5. $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ sont stables par $+$ et par multiplication par un scalaire.

Définition 6 (Base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)

Soit $a \in [\![1, n]\!]$ et $b \in [\![1, p]\!]$. On définit $E_{a,b}$ comme la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient de la ligne a et de la colonne b qui est égal à 1. Plus précisément, si $E_{a,b} = (e_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$, alors
$$e_{ij} = \delta_{ai}\delta_{bj}.$$

nlaillet.math@gmail.com

Proposition 7

Soit $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $M = \sum_{a=1}^{n} \sum_{b=1}^{p} m_{ab} E_{ab}$.

1.3 Produit de matrices – anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Définition 8 (Produit de deux matrices)

Soient A dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et B dans $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Le produit de A par B, noté $A \times B$ ou AB, est la matrice $C = (c_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ de $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

Proposition 9 (Propriétés du produit)

n, p, q, r désignent quatre entiers non nuls.

1. (associativité) Pour toutes matrices A de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, B de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et C de $\mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.
2. (distributivité) Pour toutes matrices A et B de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, C et D de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $A(C+D) = AC+AD$ et $(A+B)C = AC + BC$
3. (comportement avec les scalaires) Pour toutes matrices A de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, B de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ λ et μ éléments de $\mathbb{K}$,$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
4. (élément neutre) Pour toute matrice A de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathrm{I}_n A = A$ et $A\mathrm{I}_p = A$.

Proposition 10

L'ensemble $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau non commutatif, de neutre pour $+$ 0_n et de neutre pour $\times$ I_n. On notera alors $A^n = A \times A \times \cdots \times A$.

Définition 11

On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0_n$.

Proposition 12

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si $AB = BA$, alors pour tout k entier,

$$(A+B)^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} A^\ell B^{k-\ell} \text{ et } A^k - B^k = (A-B) \left(\sum_{\ell=0}^{k-1} A^\ell B^{k-\ell} \right).$$

Proposition 13

$\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ sont stables par $\times$ (ce sont des sous-anneaux de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
De plus, si $(A, B) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})^2$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})^2$ ou $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})^2$, alors les coefficients diagonaux de AB sont obtenus en faisant le produit des coefficients diagonaux de A et de B.

Proposition 14 (Produits d'éléments de la base canonique)

On note, pour cette proposition $E_{a,b}^{(n,p)}$ la matrice de la base canonique de taille (n, p), dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient (a, b).

1. On a : $E_{a,b}^{(n,p)} \times E_{c,d}^{(p,q)} = \delta_{bc} E_{a,d}^{(n,q)}$.

On fixe $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

2. Pour tout i dans $[\![1, p]\!]$, $A \times e_i = C_i$, où C_i est la i-ème colonne de A.
3. Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $AX = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} x_k C_k$.

Proposition 15 (Produit par blocs)

Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, avec

$$A = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} V & W \\ X & Y \end{pmatrix},$$

où $R \in \mathscr{M}_{a,b}(\mathbb{K})$, $S \in \mathscr{M}_{a,c}(\mathbb{K})$, $T \in \mathscr{M}_{d,b}(\mathbb{K})$ et $U \in \mathscr{M}_{d,c}(\mathbb{K})$, et où $V \in \mathscr{M}_{b,e}(\mathbb{K})$, $W \in \mathscr{M}_{b,f}(\mathbb{K})$, $X \in \mathscr{M}_{c,e}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathscr{M}_{c,f}(\mathbb{K})$, alors

$$AB = \begin{pmatrix} EV + SX & RW + SY \\ TV + UX & TW + UY \end{pmatrix}.$$

En particulier, si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, avec $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A et si $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, avec $C_1, \dots, C_q$ les colonnes de B,

$$A \times B = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \times B = \begin{pmatrix} L_1 \times B \\ \vdots \\ L_n \times B \end{pmatrix}$$

et

$$A \times B = A \times \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC_1 & AC_2 & \cdots & AC_q \end{pmatrix}.$$

Définition 16

Les éléments inversibles (pour $\times$) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont appelées matrices inversibles. On appelle leur ensemble groupe linéaire et on le note $GL_n(\mathbb{K})$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Proposition 17 (Admise)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors les ASSE :

1. A admet un inverse à gauche (i.e. $\exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ B \times A = \mathrm{I}_n$)
2. A admet un inverse à droite (i.e. $\exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ A \times B = \mathrm{I}_n$)
3. $A \in GL_n(\mathbb{K})$.

Proposition 18

Soient A et B deux matrices de $GL_n(\mathbb{K})$. Alors

(i) $\mathrm{I}_n \in GL_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{I}_n^{-1} = \mathrm{I}_n$.

(ii) A^{-1} est inversible d'inverse A.

(iii) AB est inversible d'inverse $B^{-1}A^{-1}$

(iv) Pour tout entier naturel k, $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.

Proposition 19

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

1.4 Transposition

Définition 20

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La transposée de A, notée ${}^tA$ ou A^T, est la matrice B de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ dont les coefficients $(b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ sont définis par

$$b_{ij} = a_{ji}.$$

Proposition 21

Soient A et A' deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, B dans $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors

(i) $(A^T)^T = A$

(ii) $(\lambda A + \mu A')^T = \lambda A^T + \mu A'^T$.

(iii) $(AB)^T = B^T A^T$.

(iv) si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, A^T est inversible, d'inverse $(A^{-1})^T$.

Définition 22

1. Une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite symétrique si $A^T = A$, antisymétrique si $A^T = -A$.
2. On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques, $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

Proposition 23

Soit M une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors il existe un unique couple (S, A) dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \times \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ tel que $M = S + A$.

1.5 Trace

Définition 24

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

On appelle trace de A, et on note $\mathrm{Tr}(A)$ l'élément de $\mathbb{K}$ défini par $\mathrm{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Proposition 25

1. (linéarité) $\forall (A, N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\mathrm{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{Tr}(A) + \mu \mathrm{Tr}(B)$,
2. (comportement avec le produit) $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Proposition 26

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors

$$\mathrm{Tr}(A^T A) = 0 \Leftrightarrow A = 0.$$