Chapitre 14
Matrices

2 Matrices et systèmes linéaires

2.1 Interprétation matricielle d'un système linéaire

Remarque 27

On rappelle qu'un système linéaire à n équations et p inconnues s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1p}x_p & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2p}x_p & = b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +\dots & +a_{np}x_p & = b_n \end{cases}$$

Ce système peut en fait s'écrire matriciellement : $AX = b$, où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Cela permet de donner la

Définition 28

Un *système linéaire* à n équations et p inconnues est la donnée d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et d'un vecteur-colonne $b \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Une **solution** du système est un vecteur-colonne $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = b$.
Le vecteur-colonne b est le **second membre** du système. Si $b = 0$, on dit que le système est homogène.

Exercice 29

Soit le système linéaire

$$\begin{cases} x + 2y - z + t = 4 \\ 3x - 8y = 2 \\ 2t = -1 \end{cases}$$

Écrire ce système sous la forme $AX = b$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Proposition 30

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $b \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'ensemble des solutions du système linéaire $AX = b$ est ou vide, ou de la forme

$$\{X_0 + X_h,\ X_h \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ AX_h = 0\}.$$

(« solution générale = solution particulière + solution générale de l'équation homogène »)

Proposition 31

Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible ssi

$$\forall b \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \exists! X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ AX = b.$$

2.2 Matrices échelonnées et systèmes échelonnés

Définition 32 (Système échelonné)

1. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $L_1, \dots, L_n$ les n lignes de A. On dit que A est échelonnée si chaque ligne a strictement + de coefficients nuls à gauche, ou bien est nulle.
   Plus précisément, en notant $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A,
   (i) il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\forall i \leqslant k$, L_i n'est pas nulle et $\forall i > k$, L_i est nulle.
   (ii) $\forall i < k$, $m(L_i) < m(L_{i+1})$,
   où $m(L_i)$ est l'indice du premier terme non nul de L_i.
2. Un système linéaire est dit échelonné si sa matrice est échelonnée.

Définition 33

Soient $X_1, X_2, \dots, X_k$ k vecteurs colonne. On définit l'ensemble $\mathrm{Vect}(X_1, X_2, \dots, X_k)$ comme l'ensemble des combinaisons linéaires de $X_1, X_2, \dots, X_k$:

$$\mathrm{Vect}(X_1, X_2, \dots, X_k) = \{\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_k X_k, (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k\}.$$

Proposition 34 (Solutions d'un système échelonné homogène)

Soit $AX = 0$ un système échelonné homogène à p inconnues et k lignes non nulles. Alors il existe $X_1, \dots, X_{p-k}$ $p-k$ vecteurs tels que l'ensemble des solutions soit $\mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_{p-k})$.

Que se passe-t-il lorsque le système n'est pas homogène ?

Proposition 35 (Solutions d'un système échelonné inhomogène)

Soit $AX = B$ un système de n équations à p inconnues, tel que le système homogène associé soit échelonné, avec k lignes non nulles. Alors nécessairement $k \leqslant n$. De plus,

1. Si $k = n$, alors le système admet une unique solution.
2. Si $k < n$, alors les lignes dont la partie homogène est nulle définissent des *conditions de compatibilité*. Si elles ne sont pas vérifiées, le système n'a pas de solution. Si elles sont vérifiées, il existe une solution particulière X_0 de $\mathscr{M}_{p-k,1}(\mathbb{K})$ et $X_1, \ldots, X_{p-k}$ $p-k$ vecteurs tels que l'ensemble des solutions soit $X_0 + \mathrm{Vect}(X_1, \ldots, X_{p-k})$.

Remarque 36

Interprétation géométrique des équations de droites, de plans, et des recherches d'intersection.

Proposition 37

Soit A une matrice échelonnée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est triangulaire supérieure.

Rappel : résolvons un système échelonné.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

 nlaillet.math@gmail.com

Proposition 38

Soit $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si, et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls. Dans ce cas A^{-1} est aussi triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont les inverses des coefficients diagonaux de A.

Démonstration

On démontre le résultat par récurrence sur n.
Initialisation. Toute matrice triangulaire supérieure de taille 1 est une matrice de la forme (a) avec $a \in \mathbb{K}$, inversible ssi $a \neq 0$. Dans ce cas, $(a)^{-1} = (a^{-1})$.
Hérédité. Suppososns le résultat vrai pour un certain n dans $\mathbb{N}^*$. Soit A dans $\mathcal{T}_{n+1}(\mathbb{K})$. On peut écrire A sous la forme $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0_{1,n} & d \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $d \in \mathbb{K}$.

1. **si** A **est inversible**, alors on peut écrire son inverse sous la forme $\begin{pmatrix} B' & C' \\ L' & d' \end{pmatrix}$ où $B' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $C' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $L' \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et $d \in \mathbb{K}$. On a alors
   - $AA^{-1} = \mathrm{I}_{n+1}$, donc, par produit par blocs, comme $\begin{pmatrix} B & C \\ 0_{1,n} & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B' & C' \\ L' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix}$,
     — $dd' = 1$ donc $d' \neq 0$ et $d' = \dfrac{1}{d}$,
     — $dL' = 0_{1,n}$ donc $L' = 0_{1,n}$,
     — $BB' + CL' = \mathrm{I}_n$ donc $BB' = \mathrm{I}_n$
   - $A^{-1}A = \mathrm{I}_{n+1}$, donc de Même, $B'B = \mathrm{I}_n$, donc B est triangulaire supérieure inversible, donc tous ses coefficients diagonaux sont non nuls

   Donc, comme $d \neq 0$, tous les coefficients diagonaux de A sont non nuls.
2. **si** A **est à coefficients diagonaux non nuls,** alors par hypothèse de récurrence, B est inversible. On pose alors $M = \begin{pmatrix} B^{-1} & -\dfrac{1}{d}B^{-1}C \\ 0_{1,n} & \dfrac{1}{d} \end{pmatrix}$, et on vérifie aisément que $MA = AM = \mathrm{I}_{n+1}$. Le fait que les coefficients diagonaux de M soient les inverses de ceux de A est alors évident, car B^{-1} est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux inverses de ceux de B, et le dernier coefficient de M est $\dfrac{1}{d}$ qui est bien l'inverse du dernier coefficient diagonal de A.

■

Remarque 39

Le résultat est bien sûr tout aussi vrai pour les matrices triangulaires inférieures et pour les matrices diagonales.

2.3 Opérations élémentaires et pivot

Définition 40 (Opérations élémentaires)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice. On définit les trois opérations élémentaires possibles sur les lignes.

1. L'échange de lignes, symbolisé par l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$.
2. La multiplication de L_i par un réel *non nul* λ : $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
3. L'ajout de λ fois la ligne j à la ligne i, symbolisé par l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

On définit les mêmes opérations sur les colonnes de A.

Définition 41 (Matrices élémentaires)

- Soit $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$, $k \neq \ell$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on appelle *matrice de transvection* la matrice :

$$T_{k,\ell}(\lambda) = \mathrm{I}_p + \lambda\, E_{k,\ell} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & \lambda & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}}_{\text{le } \lambda \text{ est à la } (k,\ell)\text{-ième position}}$$

  Cette matrice est inversible et son inverse est $\left(T_{k,\ell}(\lambda)\right)^{-1} = T_{k,\ell}(-\lambda)$.

- Soit $k \in [\![1,n]\!]$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on appelle *matrice de dilatation* la matrice :

$$D_k(\lambda) = \mathrm{I}_n + (\lambda - 1)E_{k,k} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}}_{\text{le } \lambda \text{ est à la } (k,k)\text{-ième position}}$$

  Cette matrice est inversible et son inverse est $D_k\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$.

- Soit $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]$ tel que $k \neq \ell$. On définit la matrice de permutation $P_{k\ell}$ comme $P_{k\ell} = \mathrm{I}_n + E_{k\ell} + E_{\ell k} - E_{kk} - E_{\ell\ell}$. Cette matrice est inversible d'inverse elle-même. On a donc

$$P_{k\ell} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Exercice 42

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Écrire les matrices $T_{1,2}(2)$, $D_3(-2)$ et $P_{1,3}$ et effectuer rapidement les produits

$$T_{1,2}(2)A,\ D_3(-2)A,\ P_{1,3}A,\ AT_{1,2}(2),\ AD_3(-2) \text{ et } AP_{1,3}$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Proposition 43

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1.
   - si $\lambda \in \mathbb{K}$, si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, si $T_{i,j}(\lambda)$ est la matrice de transvection de taille $n \times n$ comme définie ci-dessus, alors $T_{i,j}(\lambda) \times A$ est la matrice obtenue à partir de A en faisant l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
   - si $\lambda \in \mathbb{K}$, si $k \in [\![1,n]\!]$, si $D_k(\lambda)$ est la matrice de dilatation de taille $n \times n$ comme définie ci-dessus, alors $D_k(\lambda) \times A$ est la matrice obtenue à partir de A en faisant l'opération $L_k \leftarrow \lambda L_k$.
   - si $\lambda \in \mathbb{K}$, si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, si $P_{i,j}$ est la matrice de permutation de taille $n \times n$ comme définie ci-dessus, alors $P_{i,j} \times A$ est la matrice obtenue à partir de A en faisant l'opération $L_j \leftrightarrow L_i$.
2.
   - si $\lambda \in \mathbb{K}$, si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, si $T_{i,j}(\lambda)$ est la matrice de transvection de taille $n \times n$ comme définie ci-dessus, alors $A \times T_{i,j}(\lambda)$ est la matrice obtenue à partir de A en faisant l'opération $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$.
   - si $\lambda \in \mathbb{K}$, si $k \in [\![1,n]\!]$, si $D_k(\lambda)$ est la matrice de dilatation de taille $n \times n$ comme définie ci-dessus, alors $A \times D_k(\lambda)$ est la matrice obtenue à partir de A en faisant l'opération $C_k \leftarrow \lambda C_k$.
   - si $\lambda \in \mathbb{K}$, si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, si $P_{i,j}$ est la matrice de permutation de taille $n \times n$ comme définie ci-dessus, alors $A \times P_{i,j}$ est la matrice obtenue à partir de A en faisant l'opération $C_j \leftrightarrow C_i$.

De cette proposition on déduit la

Proposition 44

Dans un système linéaire, faire des opérations élémentaires ne change pas l'ensemble de solutions.

Démonstration

Soit $AX = b$ un système linéaire d'inconnue X. Si on fait une série d'opérations élémentaires sur le système linéaire, cela signifie que l'on dispose de $B_1, \dots, B_p$ p matrices élémentaires telles que le système soit transformé en $(B_p \dots B_1)AX = (B_p \dots B_1)b$. Or, ces matrices étant toutes inversibles, on a leur produit $B_p \dots B_1$ qui est inversible, donc $(B_p \dots B_1)AX = (B_p \dots B_1)b \Leftrightarrow AX = b$. ■

Proposition 45

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors A est équivalente en lignes à une matrice échelonnée. Plus précisément, il existe une matrice B dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, produit de matrices élémentaires, telle que BA est échelonnée.

Démonstration

On démontre ce résultat par récurrence. Plus précisément, on montre que pour tout k dans $[\![1,p]\!]$, il existe B_k, produit de matrices élémentaires, tel que B_kA est une matrice dont les k premières colonnes forment une matrice échelonnée.

Initialisation. On considère la première colonne de A. Ou bien elle est nulle et alors $B_1 = \mathrm{I}_n$ convient (la première colonne de A constitue une matrice échelonnée). Sinon, alors A possède une ligne i_0 telle que $a_{i_0,1} \neq 0$. On multiplie alors A par P_{1,i_0}. On obtient donc une matrice dont le premier coefficient est non nul. Ensuite, on multiplie la matrice $P_{1,i_0}A$ par $D_1\left(\dfrac{1}{a_{i_0,1}}\right)$. Ceci permet de transformer la matrice en une matrice dont le premier coefficient est égal à 1. On note $D_1\left(\dfrac{1}{a_{i_0,1}}\right)P_{1,i_0}A = A'$, de coefficients (a'_{ij}). On effectue alors sur A', pour tout i dans $[\![2,n]\!]$, les opérations $L_i \leftarrow L_i - a'_{i1}L_1$. Cela permet de transformer la première colonne de A en $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$.

En posant B_1 comme le produit de toutes les matrices de transvection correspondantes, de $D_1\left(\dfrac{1}{a_{i_0,1}}\right)$ et de P_{1,i_0}, on a donc le résultat.

Hérédité. On suppose que l'on dispose, pour un certain k dans $[\![1,p-1]\!]$, de B_k produit de matrices élémentaires tel que les k premières colonnes de B_kA constituent une matrice échelonnée. Notons ℓ le plus grand indice de ligne non nulle de B_kA. Notons $M = B_kA$, $M = (m_{ij})$.

On considère alors la colonne $k+1$: ce

- ou bien tous les coefficients $m_{\ell+1,k+1}, m_{\ell+2,k+1}, \dots, m_{n,k+1}$ sont nuls, et alors la matrice B_kA est déjà échelonnée.
- ou bien ça n'est pas le cas. On prend alors k_0 tel que $k_0 \geqslant \ell+1$ et $\alpha = m_{k_0,k+1} \neq 0$, et on effectue l'opération $L_{\ell+1} \leftrightarrow L_{k_0}$, i.e. on multiplie B_kA par $P_{\ell+1,k_0}$, afin d'obtenir une matrice M' de coefficients $(m'_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, dont le coefficient $(\ell+1,k+1)$ est égal à $\alpha \neq 0$.

  On fait, enfin, pour tout i dans $[\![\ell+2,n]\!]$, $L_i \leftarrow L_i - \dfrac{m'_{i,k+1}}{\alpha}L_{k+1}$. Cela permet de supprimer tous les coefficients de la colonne $k+1$, et d'avoir une matrice dont les $k+1$ premières colonnes forment une matrice échelonnée.

  En posant B_{k+1} le produit de toutes ces matrices de transvection, de $P_{\ell+1,k_0}$ et de B_k, on a le résultat !

Conclusion. D'où l'hérédité et le résultat, en particulier au rang n : on dispose d'une matrice B_n, **inversible**, telle que B_nA est échelonnée. ■

Point de méthode 46

Cela donne à nouveau une méthode pour résoudre un système linéaire : on échelonne sa matrice à l'aide du pivot de Gauss, et on répercute les opérations sur le second membre.

Proposition 47

Soit A une matrice triangulaire supérieure. Alors A est inversible si, et seulement si A est équivalente en lignes à I_n.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ La preuve est assez simple : soient $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ les coefficients de A. Comme A est inversible, ses coefficients diagonaux sont non nuls. Effectuons sur A les opérations élémentaires suivantes : pour tout i dans $[\![1, n]\!]$,

- On effectue $L_i \leftarrow \dfrac{1}{a_{ii}} L_i$: on obtient des coefficients a'_{ij} et des lignes L'_i.
- On effectue pour tout j dans $[\![1, i-1]\!]$ $L'_j \leftarrow L'_j - a'_{ji} L'_i$.

Ainsi, à l'étape $i = 1$, on obtient une colonne avec un 1 en haut à gauche, puis, à l'étape $i = 2$, on obtient une colonne avec un 0 puis un 1, etc.

$\boxed{\Leftarrow}$ Pour le sens réciproque, c'est encore plus simple : si A est équivalente en lignes à I_n, alors on dispose, par la proposition de $B_1, \dots, B_p$ p matrices inversibles telles que $B_p \dots B_1 A = \mathrm{I}_n$. Comme $B_1, \dots, B_p$ sont inversibles, $B_p \dots B_1$ est aussi inversible, donc $A = B_1^{-1} \dots B_p^{-1}$ qui est inversible. ■

Exemples de résolutions de systèmes linéaires via le pivot.

2.4 Pivot total pour une matrice carrée

Étant donnés les résultats des deux sections préédentes, on est en droit de se demander si les opérations élémentaires ne nous permettraient pas d'obtenir d'inverse d'une matrice. La réponse est oui ! L'idée est très simple.

Point de méthode 48

Soit A une matrice carrée. Une méthode pour déterminer l'inverse de A est de partir de la matrice A, à laquelle on accolle la matrice identité, d'essayer de transformer A en la matrice identité à l'aide d'une méthode de pivot de Gauss, et de répercuter les opérations sur la matrice identité. La matrice obtenue à droite est alors l'inverse de A.
Explications : Si on transforme A en I_n par des opérations élémentaires, c'est que l'on a des matrices élémentaires $B_1, \dots, B_q$ telles que $B_q B_{q-1} B_{q-2} \dots B_1 A = \mathrm{I}_n$. Donc $A^{-1} = B_q \dots B_1$. Mais su on a reporté les opérations sur I_n, cela signifie que la matrice obtenue à droite est $B_q \dots B_1 \mathrm{I}_n$, donc A^{-1}.

Problème, il faut que l'on justifie que l'on obtient l'inverse de A.

Exemple 49

ATTENTION ! On ne fait que des opérations sur les lignes, OU que des opérations sur les colonnes. On ne mélange surtout pas les deux ! Un mélange horrible...

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow_{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow_{C_2 \leftarrow C_2 - C_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right),$$

qui n'est pas vraiment l'inverse de la première matrice...

Exemples de calculs d'inverses de matrices carrées.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Proposition 50

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors les ASSE :

1. A est inversible.
2. pour tout b dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = b$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ admet exactement une solution.
3. A est équivalente en lignes à I_n.
4. l'équation $AX = 0_{n,1}$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ admet comme seule solution la solution nulle.
5. pour tout b dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = b$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ admet au moins une solution.

Démonstration

- L'équivalence des deux premières assertions a déjà été vue.
- Ensuite, on montre (1) $\Leftrightarrow$ (3). Si A est inversible, alors A est équivalente en lignes à une matrice triangulaire T. Cette matrice triangulaire est donc aussi inversible car on dispose de B inversible telle que $BA = T$. Donc elle est équivalente en lignes à I_n. Donc A est équivalente en lignes à I_n.
  Réciproquement, si A est équivalente en lignes à I_n, alors on dispose de B **inversible** telle que $BA = \mathrm{I}_n$. Donc $A = B^{-1}$, inversible.
- Pour la suite on pose $X_0 =^T \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- On continue en montrant (1) $-$ (2) $-$ (3) $\Leftrightarrow$ (4). Si A est équivalente en ligne à I_n, alors A est inversible, donc si $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est tel que $AX = 0_{n,1}$, alors $X = A^{-1}0_{n,1} = 0_{n,1}$. Donc le système admet une seule solution. De même, si A n'est pas équivalente en ligne à I_n, elle est équivalente à une matrice échelonnée dont la dernière ligne est nulle. On en déduit , si B est inversible telle que $BA = T$ avec T échelonnée de dernière ligne nulle, que tous les tX_0, avec $t \in \mathbb{K}$, sont solution de $TX = 0$. Donc ces vecteurs vérifient $BAX = 0$, donc, comme B est inversible, $AX = 0$.
- Enfin, on finit avec (1) $-$ (2) $-$ (3) $\Leftrightarrow$ (5). Si A est inversible, alors si $b \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $A^{-1}b$ est solution du système $AX = b$. Si A n'est pas inversible, alors on dispose de B inversible telle que $BA = T$ triangulaire de dernière ligne nulle. Mais alors TX a toujours une dernière ligne nulle. Donc $TX = X_0$ n'a pas de solution. Donc $BAX = X_0$ n'a pas de solution, donc $AX = B^{-1}X_0$ n'a pas de solution.

$\blacksquare$

Proposition 51

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible à gauche ssi A est inversible à droite ssi A est inversible.

Démonstration

Si A est inversible à gauche, alors on dispose de B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = \mathrm{I}_n$. Donc si X vérifie $AX = 0_{n,1}$, alors $BAX = 0_{n,1}$, donc $X = 0_{n,1}$. Donc l'équation $AX = 0_{n,1}$ admet une unique solution, donc A est inversible.
Si A est inversible à droite, alors on dispose de B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = \mathrm{I}_n$. Donc si $b \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, si $X = Bb$, alors $AX = ABb = \mathrm{I}_n b = b$, donc le système admet au moins une solution. Donc A est inversible.
$\blacksquare$

Proposition 52

Les matrices d'opérations élémentaires engendrent $GL_n(\mathbb{K})$.