

DM-COURS 11

Pour le lundi 19 janvier

Le but de ce DM est de vous introduire aux méthodes d'étude d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$. Presque aucun résultat n'est au programme officiel (seulement celui sur la convergence vers un point fixe de f dans le cas où elle est continue). Un complément intéressant à ce DM est le poly de cours 13, disponible sur cahier-de-prépa. Il n'est pas nécessaire.

Conseils et instructions pour ce DM

- Certaines questions sont démontrées explicitement dans le poly de cours ou ont déjà été démontrées en classe : je ne les corrigerai pas.
- Faire au moins deux questions parmi les 5,6,7 (30 minutes par suite).
- La fin est optionnelle.

1. Démontrer la

Proposition 1

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et f une fonction définie sur I .
Si $f(I) \subset I$, on peut définir une suite par

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

2. Démontrer la

Proposition 2 (Seule proposition au programme)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} .

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue** vérifiant $f(I) \subset I$.

On considère une suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$ Alors si $(u_n)_n$ converge **vers** $\ell \in I$, alors $f(\ell) = \ell$.

3. Démontrer que si f est croissante sur I , alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. Illustrer sur un dessin.
4. Démontrer que si f est décroissante sur I , alors $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones, de monotonies opposées. Illustrer sur un dessin.

On donne alors le point de méthode suivant.

Point de méthode 3

Plan d'étude d'une suite vérifiant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une application continue.

- Étudier f : étudier ses variations ; déterminer ses points fixes et le signe de $x \mapsto f(x) - x$. Récapituler ces résultats dans un tableau unique.
- Déterminer à l'aide du tableau précédent un intervalle stable par f contenant u_0 .
- Placer u_n par rapport aux points fixes.
- Sens de variations de $(u_n)_n$: $\forall n \quad u_{n+1} - u_n = (f - \text{Id})(u_n)$ de signe déjà étudié. Remarque : si f est croissante, en général $(u_n)_n$ est monotone.
- Conclure : les calculs précédents montrent que la suite converge (croissante et majorée, décroissante et minorée). auquel cas la limite est un point fixe de f , ou au contraire tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ (croissante non majorée ou décroissante non minorée).

5. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \quad u_{n+1} = \frac{1 + u_n^2}{2}$.
6. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in]0, 1[$ et $\forall n \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - 2u_n}$.
7. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in]0, 1[$ et $\forall n \quad u_{n+1} = \frac{2}{1 + u_n}$. On montrera que pour une telle suite $u_1 > 1$ et on étudiera séparément les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$.

Cas particulier d'une fonction dérivable.

8. Démontrer que si f possède un point fixe sur I (intervalle stable par f), ℓ , si f est dérivable sur I , si $|f'|$ est bornée par $k \in]0, 1[$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ converge vers ℓ .

Considérations plus théoriques. Soit f une application de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On suppose que f admet un point fixe attractif x_0 , c'est-à-dire qu'il vérifie

$$f(x_0) = x_0 \quad \text{et} \quad |f'(x_0)| < 1$$

9. (a) Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ et un réel $k \in]0, 1[$ tel que la restriction de f à $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ soit k -lipschitzienne.
(b) En déduire que suite $\begin{cases} u_0 \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ converge vers x_0 .

On suppose désormais que f admet un point fixe répulsif x_0 , c'est-à-dire qu'il vérifie

$$f(x_0) = x_0 \quad \text{et} \quad |f'(x_0)| > 1$$

10. Démontrer que si la suite $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ converge vers x_0 , alors elle est stationnaire.