MPSI1 – Programme de colles
Semaine 15 – du 19 au 23 janvier 2026

Dérivabilité

Révisions sur le programme précédent.

Convexité

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
La fonction f est convexe sur I si, pour tous $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$, $f((1-\lambda)x+\lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$.	Interprétation géométrique.
Inégalité de Jensen : si f est une fonction convexe sur un intervalle I, on a l'inégalité $$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$ quels que soient les réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de somme 1 et quels que soient les éléments $x_1, \dots, x_n$ de I.	Tout développement général sur les barycentres est hors programme.
Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes.	
Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes.	
b) Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables	
Caractérisation des fonctions convexes dérivables.	
Position du graphe d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes.	
Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.	

Calcul matriciel et systèmes linéaires

Le but de cette section est de présenter une initiation au calcul matriciel. Ainsi, on prépare l'étude géométrique de l'algèbre linéaire menée au second semestre, on revient sur l'étude des systèmes linéaires et on obtient des exemples fondamentaux d'anneaux.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Opérations sur les matrices	
Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.	
~~Matrices élémentaires~~. Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de ~~matrices élémentaires~~ matrices de la base canonique.
Produit matriciel ; bilinéarité, associativité.	Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.
Produit d'une matrice ~~élémentaire~~ de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice ~~élémentaire~~ de la base canonique de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.	Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$.

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Anneau des matrices carrées	
Anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.	Non commutativité si $n \geqslant 2$. Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents.
Matrice identité, matrice scalaire.	Notation I_n.
Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.	
Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Au programme :

— cours de convexité et de matrices (le début)

— exercices de révision sur la dérivation et exercices de convexité (attention, peu d'exercices de convexité auront été faits en début de semaine). **Pas** d'exercices de matrices.

Exemples de questions de cours

1. Inégalité des pentes.
2. Une fonction convexe est dérivable à gauche et à droite à l'intérieur de son intervalle de définition.
3. Lien entre convexité et tangentes.
4. Une fonction deux fois dérivable de dérivée seconde positive est convexe.
5. Inégalité de Jensen.

6. Associativité, élément neutre, du produit matriciel.
7. Matrices de la base canonique : définition et produit de matrices de la base canonique.
8. Stabilité de l'ensemble des matrices triangulaires supérieures par produit.