

TD 13

Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. ●○○ Étudier la suite suivante : $\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3}. \end{cases}$

Exercice 2. Approximation de \sqrt{a} . ●●○ Soit $a > 0$ et (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 > 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right) \end{cases}$$

1. Étude de la convergence de (u_n)

(a) Démontrer que u_n est bien définie pour tout n et, si elle converge, son éventuelle limite.

(b) Démontrer que $u_n \rightarrow \sqrt{a}$ et que la convergence est géométrique. On étudiera $u_{n+1} - \sqrt{a}$ et on remarquera que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n} \leq 1$.

2. **Détermination de la vitesse de convergence.** On va démontrer que la convergence est bien meilleure qu'une convergence géométrique. On définit, pour tout entier naturel n ,

$$\varepsilon_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}.$$

Déterminer une expression simple de ε_n en fonction de ε_0 .

3. Montrer que $|\varepsilon_0| < 1$, et montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$|u_n - \sqrt{a}| \leq 2u_0 \cdot |\varepsilon_0|^{2^n}$$

Il s'agit d'une convergence très rapide de u_n vers \sqrt{a} .

4. Application : donner **sans calculatrice** une approximation de $\sqrt{2}$ par un rationnel à 10^{-3} près.

2 Exercices à chercher en TD

Exercice 3. ●●○ Étudier les suites suivantes

1. $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ u_{n+1} = u_n^2 + 1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2}, \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{2}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ u_{n+1} = e^{u_n}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} u_0 > 0, \quad u_1 > 0, \\ u_{n+2}u_n = u_{n+1}^2. \end{cases}$

Exercice 4. ●●○ Étudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $u_{n+1} = 2 + \ln(u_n)$. On établira déjà que la fonction f servant à définir la relation de récurrence a deux points fixes, qu'on ne cherchera pas à calculer.

Exercice 5. Une suite récurrente plus coriace!. ●●● Étudier la suite $\begin{cases} u_0 = \alpha \in [0, 1], \\ u_{n+1} = (1 - u_n) \sin(u_n). \end{cases}$

Exercice 6. Vraiment une suite récurrente?. ●●○

On définit une suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_0 + u_1 + \dots + u_n} \end{cases}$

1. Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.
2. Déterminer la limite de $u_{n+1} - u_n$.

Exercice 7. Une étude de suite récurrente avec une étude de fonction poussée. ●●○ Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$.

1. Montrer que $]0, 1]$ est stable par f .
2. Montrer que f est croissante sur $]0, 1]$.
3. Montrer que f admet un unique point fixe sur $]0, 1]$.
4. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Exercice 8. ●●● Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0, 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 \left\lfloor \frac{1}{u_n} \right\rfloor$.

1. Démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
2. Démontrer que ou bien $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ou bien $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire. (et que ce « ou » est exclusif)