nlaillet.math@gmail.com

TD 14
Calcul matriciel et systèmes linéaires

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(M - I_3)(M + 3I_3)$ et en déduire M^{-1}.
2. Montrer qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $M^n = u_n M + v_n I_3$. On montrera cette existence par récurrence et on précisera la relation entre (u_{n+1}, v_{n+1}) et (u_n, v_n).
3. Déterminer une matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer P^{-1}.
5. On note $B = P^{-1} \times A \times P$. Calculer B^n pour tout n et en déduire une expression de A^n, puis de u_n, v_n et enfin M^n.

Exercice 2. *Matrices symétriques et antisymétriques*.

1. Soient A et B deux matrices symétriques. Montrer que A et B commutent si et seulement si AB est symétrique.
2. Établir un résultat équivalent pour les matrices antisymétriques.

Exercice 3. *Matrices nilpotentes*. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On rappelle qu'une matrice carrée $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier p tel que $N^p = 0$.

1. Quelles sont les matrices nilpotentes triangulaires supérieures ? *On ne demande pas de justification particulière.*
2. (a) Démontrer que si A et B sont deux matrices nilpotentes **qui commutent**, alors AB est nilpotente. Trouver deux matrices A et B de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que A et B soient nilpotentes mais pas AB.
   (b) Démontrer que si A et B sont deux matrices nilpotentes **qui commutent**, alors $A+B$ est nilpotente. Trouver deux matrices A et B de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que A et B soient nilpotentes mais pas $A + B$.
3. Soit N une matrice nilpotente. Démontrer que $\mathrm{I}_n - N$ est inversible et donner son inverse sous la forme d'un polynôme en N.

Exercice 4. *Matrices de permutation*. On définit, si σ est une permutation de $[\![1, n]\!]$, $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Représenter P_σ si σ est une transposition, un p-cycle. Démontrer que l'application

$$\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathfrak{S}_n \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ \sigma \mapsto P_\sigma \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupes.

Exercice 5. *Théorème d'Hadamard*.
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice carrée telle que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ i\neq j}} |a_{ij}| < |a_{ii}|$.

(On dit que A est à diagonale strictement dominante.) Démontrer que A est inversible.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

2 Exercices à faire en TD

Stratégie à adopter. Il y a trois types d'exercices dans cette feuille de TD :

- les calculatoires purs : les exercices 6 et 7 sont des prolongements de 1, l'exercice 8 est aussi un simple calcul ; les exercices 14, 15 et 15 sont des calculs bruts sur des systèmes linéaires (utilisation du pivot) ; les exercices 17 et 18 sont des calculs bruts sur des matrices (utilisation du pivot aussi)
- les théoriques purs : ces exercices n'ont absolument pas besoin de faire des calculs explicites de produits matriciels (un peu comme les exercices 2 ou 3). Il s'agit des exercices 10 et de la seconde partie de 13.
- les théorico-calculatoires : exercices très importants, ils vous forcent à calculer des produits matriciels théoriques. Ce sont les exercices 11, 12, le début de 13, et les exercices plus difficiles 19 et 20.

Minimum conseillé. L'exercice 6, l'exercice 10, **si vous avez du mal à calculer, l'exercice 14 et 17**, l'exercice 12 (plus dur !) et l'exercice 13.

2.1 Matrices

Exercice 6. *Puissances de matrices*. ●●○

1. Calculer, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la puissance n-ième des matrices suivantes :

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

(c) Si $\theta \in \mathbb{R}$, $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

(d) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $M_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ (matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$).

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ (avec a et b des réels et, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = \cos(\theta)u_n - \sin(\theta)v_n \\ v_{n+1} = \sin(\theta)u_n + \cos(\theta)v_n \end{cases}$$

En posant, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, donner l'expression du terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 7. ●◐○ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $-A^3 + A^2 + 5A - \mathrm{I}_3$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 8. *Inversibilité des matrices d'ordre* 2. ●●○ Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$$

Calculer $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)\mathrm{I}_2$. À quelle condition A est-elle inversible ? Déterminer alors A^{-1}.

Exercice 9. ●●○ Soient $(a_1, \dots, a_n)$, $(b_1, \dots, b_n)$, $(c_1, \dots, c_n)$, $(d_1, \dots, d_n)$ des éléments de $\mathbb{K}$. On considère la matrice $A \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & & & & \\ c_1 & d_1 & & & & & & \\ & & a_2 & b_2 & & (0) & & \\ & & c_2 & d_2 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & (0) & & & \ddots & & \\ & & & & & & a_n & b_n \\ & & & & & & c_n & d_n \end{pmatrix}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible. Déterminer, le cas échéant, l'inverse de A.

Exercice 10. *Relation de similitude.* ●○○

1. Montrer que la relation $\sim$ définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ par $A \sim B$ ssi « il existe $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible vérifiant $A = PBP^{-1}$ » est une relation d'équivalence.

On appelle cette relation relation de *similitude* et on dit que deux matrices A et B qui satisfont cette relation sont semblables. Soient alors A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ semblables.

2. Montrer que si l'une des deux matrices A ou B est inversible, alors l'autre aussi.
3. Montrer que si $B = \lambda \mathrm{I}_n$ ($\lambda \in \mathbb{K}$), alors $A = B$. Quelle est la classe d'équivalence d'une matrice scalaire ?
4. Montrer que si l'une des deux matrices A ou B est nilpotente (il existe un entier p tel que $A^p = 0_n$ ou $B^p = 0_n$), alors l'autre aussi.

Exercice 11. *Matrices élémentaires.* ●○○ Soit n un entier non nul. Pour i et j dans $[\![1, n]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice avec tous les coefficients nuls, sauf le coefficient (i, j) égal à 1.

1. Calculer $E_{i,j} \times E_{k,l}$.
2. Si $A = (a_{rs})_{1 \leqslant r,s \leqslant n}$, calculer $E_{i,j} \times A$ et $A \times E_{i,j}$.

Exercice 12. *Questions de commutation.* ●●○

1. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

   Déterminer les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec D.
2. Déterminer l'ensemble des matrices A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que
$$\forall B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ AB = BA.$$

Exercice 13. *Inégalité de Cauchy-Schwarz pour la trace.* ●●○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour toute matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(A^T A) \geqslant 0$, avec égalité si, et seulement si $A = 0$.
2. Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit, pour tout x dans $\mathbb{R}$, la fonction $f(x) = \mathrm{Tr}((A + xB) \times (A + xB)^T)$.
   (a) Développer f et montrer qu'il s'agit d'un polynôme de degré 2 en x.
   (b) En étudiant son signe et son discriminant, montrer que $\mathrm{Tr}(AB^T)^2 \leqslant \mathrm{Tr}(A^T A)\mathrm{Tr}(B^T B)$.

2.2 Matrices et systèmes linéaires – méthode du pivot

On présentera les solutions des systèmes linéaires en utilisant la notation Vect.

Exercice 14. ●○○ Résoudre les systèmes linéaires suivants (en appliquant l'algorithme de Gauss), par rapport aux indéterminées $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$:

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_3 + 3x_4 = -2 \\ -4x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 13 \\ 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 9 \end{cases}$.

Exercice 15. ●◐○ Déterminer pour quels valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ le système :

$$\begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ 2y + az = b \\ -x + ay + 3z = a \end{cases}$$

1. admet une solution unique ;

2. admet une infinité de solutions ;

3. n'a pas de solutions.

Expliciter les solutions pour $a = b = 2$.

Exercice 16. ●○○ Résoudre les systèmes linéaires suivants (en appliquant l'algorithme de Gauss), par rapport aux indéterminées complexes $x, y, z \in \mathbb{C}$:

1. $\begin{cases} x + iy = 0 \\ 3x + 2y + z = 4 + i \\ ix - y + (1+i)z = 2 \end{cases}$,

2. $\begin{cases} x + iy - 3z = 1 \\ ix - y - iz = -1 \\ -x - iy - (3+4i)z = -3 - 2i \end{cases}$.

Exercice 17. ●◐○ Calculer les inverses des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 18. ●●○ Pour chacune de ces matrices, discuter suivant les valeurs du réel m si elle est inversible, et donner le cas échéant son inverse.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & 0 & m \\ m-1 & m-2 & 1-m \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

Exercice 19. *Inverse de la matrice des coefficients binomiaux*. ●●◐ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A la matrice définie par $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où, pour tous i et j dans $\mathbb{N}$, $a_{ij} = \binom{i-1}{j-1}$ (coefficient binomial).

1. Représenter A dans le cas $n = 3$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{n-1} \end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées de AU.
3. Soit V le vecteur $V = \begin{pmatrix} 1 \\ x+1 \\ (x+1)^2 \\ \vdots \\ (x+1)^{n-1} \end{pmatrix}$. En posant $y = x+1$, exprimer les coordonnées de V, puis de U, en fonction de y. En déduire une matrice B telle que $U = BV$.
4. En déduire un inverse possible de A et vérifier que cet inverse potentiel est un inverse effectif.

Exercice 20. *Relation d'équivalence*. ●●● Soient n et p deux entiers naturels non nuls, A et B deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont équivalentes en lignes-colonnes si on peut passer de A à B par des opérations élémentaires sur les lignes **et** sur les colonnes.

1. Démontrer que A et B sont équivalentes en lignes-colonnes si, et seulement s'il existe P dans $GL_n(\mathbb{K})$ et Q dans $GL_p(\mathbb{K})$ telles que $A = PBQ$.

On dira désormais, si A et B sont équivalentes en lignes-colonnes, que A et B sont équivalentes.

2. Démontrer que A est équivalente à une matrice de la forme $J_{n,p,r}$ où $J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$, avec r « 1 » dans la diagonale.
3. Démontrer que si $n = p$ et A n'est pas inversible, alors A est équivalente à une matrice triangulaire supérieure stricte.

 nlaillet.math@gmail.com

Indications

1 Pour la dernière question, penser au fait que $A = PBP^{-1}$ et que $A^2 = PBP^{-1}PBP^{-1} = PB^2P^{-1}$... Poursuivre avec une récurrence.

2 Utiliser la formule de la transposée d'un produit.

3 Penser que si A et B commutent, $(AB)^k = A^kB^k$, et que si A et B commutent, le binôme de Newton s'applique ! Enfin, pour la dernière question, penser que $\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n - N^p$.

5 Utiliser le fait que A est inversible ssi : $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ AX = 0_{n,1} \Rightarrow X = 0_{n,1}$.

Et considérer, si X est tel que $AX = 0_{n,1}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, i_m tel que $|x_{i_m}| = \max\{|x_k|,\ k \in [\![1, n]\!]\}$.

6 Tester les premières puissances $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, puis conjecturer un résultat à démontrer par récurrence !

7 Faire le calcul, et ensuite, écrire l'équation sous la forme $M(...) = \mathrm{I}_n$.

8 Faire le calcul !

10 Utiliser que si $A = PBP^{-1}$, $B = P^{-1}AP$.

11 Cf. cours. De plus, je conseille de partir sur deux preuves : ou bien l'utilisation brute du symbole de Kronecker, ou bien les produits matriciels « avec les mains ». Il faut pouvoir mener les deux raisonnements.

12
1. Écrire proprement, coefficient par coefficient, la relation $AD = DA$, et montrer que le commutant de D est l'ensemble des matrices diagonales.
2. Prendre A commutant avec toutes les matrices. Montrer que, par la question précédente, A est diagonale, puis la faire commuter avec une matrice de permutation P_{ij} pour montrer que son i-ème coefficient diagonal et son j-ème coefficient diagonal sont égaux.

13 Pour la première question, écrire coefficient par coefficient. Pour la deuxième, ne pas revenir aux coefficients et utiliser simplement la linéarité de la trace et le fait que x est un réel.

14 C'est du pivot de Gauss simple.

15 Ne pas oublier de disjoindre les cas dès lors qu'on fait une opération potentiellement interdite (division par un nombre qui dépend d'un paramètre, multiplication d'une ligne par un nombre dépendant d'u paramètre, etc.)

16 C'est simplement du pivot de Gauss.

17 C'est simplement du pivot de Gauss.

18 Ne pas oublier de disjoindre les cas dès lors qu'on fait une opération potentiellement interdite (division par un nombre qui dépend d'un paramètre, multiplication d'une ligne par un nombre dépendant d'u paramètre, etc.)

19 Ne pas oublier la formule du binôme de Newton ! Pour la dernière question, plus délicate, démontrer que $\binom{i-1}{k-1}\binom{k-1}{j-1} = \binom{i-1}{j-1}\binom{i-j}{k-j}$.

20 Utiliser en détail les propriétés du poly sur le pivot de Gauss, et notamment que toute matrice inversible est équivalente en lignes à une matrice échelonnée. Essayer ensuite de montrer qu'une matrice échelonnée est équivalente en colonnes à $J_{n,p,r}$.