DM12
Facultatif (la JPO, c'est prioritaire !), à rendre entre le 26 janvier et le 31 janvier

Formules possibles.

1. Formule 1, « bases » : Problème 1.A, Problème 2.A (2h)
2. Formule 2, « plus avancée en analyse » : Problème 1.A et Problème 2 (3h)
3. Formule 3, « plus avancée en algèbre » : Problème 1 et Problème 2.A (rq : les deux dernières questions du problème 1 sont difficiles et sont hors barème pour cette formule) (3h)
4. Formule 4, complète : faire les problèmes 1 et 2. (4h)

Précisez en début de DM la formule choisie.

Problème 1. Autour de la trace

A. La trace comme application linéaire

On note $(E_{a,b})_{1\leqslant a,b\leqslant n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Démontrer que pour toutes matrices A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Que vaut $\mathrm{Tr}(AE_{ij})$?
3. **Application.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :
$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{Tr}(AM) = 0.$$
Montrer que A est nulle. Pourquoi est-ce évident dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

On appelle **forme linéaire sur** $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ toute application φ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ vérifiant :
$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \varphi(\lambda A + \mu B) = \lambda\varphi(A) + \mu\varphi(B).$$

4. Soit f une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout M dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $f(M) = \mathrm{Tr}(AM)$
5. Soit ψ une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant : $\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \psi(AB) = \psi(BA)$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout M dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\psi(M) = \lambda\mathrm{Tr}(M)$.

B. Toute matrice de trace nulle est un commutateur

Notre but est d'établir le résultat suivant :

Soit M une matrice de trace nulle. Alors il existe $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $M = AB - BA$.

B-I. Le cas à diagonale nulle

6. Soit $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et D la matrice diagonale de coefficients diagonaux $(1,2,\dots,n)$. Donner le coefficient (i,j) de $MD - DM$.
7. Soit A une matrice carrée de diagonale nulle. Déterminer une matrice M telle que $A = MD - DM$.

B-II. Un résultat intermédiaire

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de trace nulle. On veut montrer qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{K})$ tel que $A = P^{-1}AP$ soit de diagonale nulle.

8. Pourquoi est-ce évident si $a = 0$?

9. Démontrer que l'une des trois matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 1 & c+d \end{pmatrix}$$

est inversible.

10. Sans perte de généralité, on suppose que $P = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$ est inversible. Montrer alors que $P^{-1}AP$ est à diagonale nulle.

B-III. Conclusion (partie délicate)

11. Démontrer par récurrence sur la dimension que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.
Indication. On prend A de trace nulle, $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On suppose que les a_{ii} ne sont pas tous égaux (sinon c'est évident). On prend un i tel que $a_{ii} \neq a_{i+1,i+1}$. On considère le carré de diagonale a_{ii}, $a_{i+1,i+1}$ de la matrice, que l'on note $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Montrer que l'une des 3 matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 1 & c+d \end{pmatrix}$$

est inversible. Puis, en prenant P l'une de ces matrices, considérer la matrice par blocs $R = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_{n-i-1} \end{pmatrix}$, montrer qu'elle est dans $GL_n(\mathbb{R})$ et faire le produit $R^{-1}AR$.

12. Conclure au résultat désiré.

Problème 2. Méthode d'Euler

A. Questions préliminaires

Les résultats établis dans cette partie pourront être utilisés pour la suite. On établit d'abord la

Proposition 1 (Égalité de Taylor-Lagrange)

Soit φ une fonction deux fois dérivable d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$, a et b deux points de I. Alors il existe c entre a et b tel que $\varphi(b) = \varphi(a) + \varphi'(a)(b-a) + \dfrac{\varphi''(c)}{2}(b-a)^2$.

Pour la preuve, on suppose $a < b$ mais elle s'adapte parfaitement au cas où $a > b$.
On pose $\psi : x \mapsto \varphi(x) - \varphi'(a)(x-a)$.

1. En considérant la fonction $\zeta : x \mapsto \psi(x) - \dfrac{(x-a)^2}{(b-a)^2}(\psi(b) - \psi(a))$, démontrer qu'il existe c dans $]a, b[$ tel que $\psi''(c) = \dfrac{2}{(b-a)^2}(\psi(b) - \psi(a))$. En déduire la proposition voulue.

2. Déduire de l'égalité de Taylor-Lagrange le fait qu'une fonction convexe deux fois dérivable est toujours au-dessus de ses tangentes.

Pour notre deuxième résultat préliminaire, on considère une suite de réels $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, telle qu'il existe deux réels strictement positifs A et B vérifiant, pour tout k dans $\mathbb{N}$,

$$0 \leqslant a_{k+1} \leqslant (1+A).a_k + B.$$

3. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$0 \leqslant a_n \leqslant (1+A)^n a_0 + \frac{(1+A)^n - 1}{A} B \leqslant \mathrm{e}^{nA} a_0 + \frac{\mathrm{e}^{nA} - 1}{A} B.$$

B. Description de la méthode

On cherche à approcher les solutions d'une équation différentielle de la forme $y'(t) = F(y(t))$, où F est une fonction dérivable, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, où la fonction inconnue y est une fonction $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$ où $a < b$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Le **schéma d'Euler à** $n+1$ **points** consiste à poser

- le **pas** de la méthode $h_n = \dfrac{b-a}{n}$,
- les **temps discrétisés** $(t_{n,k})_{0\leqslant k\leqslant n}$ définis par $t_{n,k} = a + kh_n$,
- la suite des **valeurs approchées de la solution** $(y_{n,k})_{0\leqslant k\leqslant n}$ définie par $y_{n,0} = y(a)$ et pour tout k dans $[\![1, n]\!]$,
$$y_{n,k} = y_{n,k-1} + h_n F(y_{n,k-1}).$$

Cette formule s'explique simplement : $y_{n,k}$ est censé être une approximation de $y(t_{n,k})$. Ainsi,

$$\frac{y_{n,k} - y_{n,k-1}}{h_n} \approx \frac{y(t_{n,k}) - y(t_{n,k-1})}{h_n} \approx \frac{y(t_{n,k}) - y(t_{n,k-1})}{t_{n,k} - t_{n,k-1}} \approx y'(t_{n,k-1}) \approx F(y(t_{n,k-1})) \approx F(y_{n,k-1}).$$

4. Proposer un programme Python `euler(F,a,b,y0,n)` qui prend en arguments une fonction `F`, deux flottants `a<b`, une condition initiale `y0`, un entier `n` et qui renvoie deux listes : la liste des temps discrétisés et la liste des valeurs approchées de la solution.

C. Preuve de la convergence

Dans cette partie, y est une solution $\mathscr{C}^1$ de l'équation différentielle. On suppose de plus que F est $\mathscr{C}^1$, de dérivée bornée par $K > 0$.

5. Démontrer que y est de classe $\mathscr{C}^2$, que y' et y'' sont bornées sur $[a, b]$.
On note $C = \sup\limits_{t\in[a,b]} |y'(t)|$ et $D = \sup\limits_{t\in[a,b]} |y''(t)|$.

6. Démontrer que $\forall (w, z) \in \mathbb{R}^2,\ |F(w) - F(z)| \leqslant K|w - z|$.

On admettra aussi que pour tous s et t dans $[a, b]$,

$$|y(s) - y(t)| \leqslant C|s - t| \text{ et } |y'(s) - y'(t)| \leqslant D|s - t|.$$

7. On fixe n dans $\mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. Démontrer que

$$|y(t_{n,k+1}) - y_{n,k+1}| \leqslant (h_n.\mathrm{K} + 1)\,|y(t_{n,k}) - y_{n,k}| + \frac{h_n^2}{2} D$$

On pourra utiliser la question 1.

On note alors l'erreur d'ordre n

$$\mathrm{err}_n = \max_{0\leqslant k\leqslant n} |y_{n,k} - y(t_{n,k})|\,.$$

8. Démontrer que pour tout k dans $[\![0, n]\!]$,

$$\mathrm{err}_n \leqslant \frac{\mathrm{e}^{K(b-a)} - 1}{K} \frac{h_n}{2} D$$

9. En déduire que pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$,

$$\left|\frac{y_{n,k+1} - y_{n,k}}{t_{n,k+1} - t_{n,k}}\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{K(b-a)} - 1}{K} D + C.$$

On pourra écrire que $|y_{n,k+1} - y_{n,k}| = |y_{n,k+1} - y(t_{n,k+1}) + y(t_{n,k+1}) - y(t_{n,k}) + y(t_{n,k}) - y_{n,k}|$.

On note de plus g_n la fonction définie ainsi :

- pour tout k dans $[\![0, n]\!]$ $g_n(t_{n,k}) = y_{n,k}$
- g_n est affine sur chaque segment $[t_{n,k}, t_{n,k+1}]$.

10. Démontrer qu'il existe une constante M telle que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![0, n-1]\!]$, pour tous $(r, s) \in [t_{n,k}, t_{n,k+1}]$,

$$|g_n(r) - g_n(s)| \leqslant M|r - s|.$$

11. Démontrer que pour tout x dans $[a, b]$, $g_n(x) - y(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On pourra, pour x et n fixés, considérer k tel que $x \in [t_{n,k}, t_{n,k+1}]$.