N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Chapitre 14
Développements limités

1 Développements limités

1.1 Définition

Définition 1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, a un point ou une borne de I, n un entier. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en I s'il existe $n+1$ réels $b_0, b_1, \dots, b_n$ tels que

$$f(x) \underset{a}{=} b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots + b_n(x-a)^n + o((x-a)^{n+1}).$$

$b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots + b_n(x-a)^n$ est appelée partie régulière du développement limité de f à l'ordre n en a.
Le premier ordre non nul du développement limité de f en a est, s'il existe, $p = \min\{k \in [\![0, n]\!], b_k \neq 0\}$.

Proposition 2

(i) La partie régulière d'un développement limité est unique.

(ii) Si f admet un dl à l'ordre n en a, alors elle admet un dl à l'ordre m pour tout entier $m \leqslant n$: si

$$f(x) \underset{x\to a}{=} b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n + o((x-a)^n),$$

alors

$$f(x) \underset{x\to a}{=} b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^k + o((x-a)^k).$$

On a fait ainsi la **troncature à l'ordre** k de la partie régulière du $dl_n(a)$ de f.

(iii) Si le premier ordre non nul du dl de f en a est p, alors on a $f(x) \underset{x\to a}{\sim} b_p(x-a)^p$.

Proposition 3

1. f est continue (ou prolongeable par continuité) en a si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 0 en a.
2. f est dérivable en a si set seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a.

Ces résultats sont faux pour les ordres supérieurs.

Remarque 4

Déterminer le développement limité de $f(x)$ en a revient à déterminer le développement limité de $f(a+h)$ en 0 : voilà pourquoi on ne s'intéressera (presque) qu'à des développements limités en 0.

1.2 Développements limités usuels en 0

Théorème 5 (Formule de Taylor-Young)

Soient n un entier naturel non nul, f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et $a \in I$. Alors

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

En d'autres termes,

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n).$$

Proposition 6 (dl usuels en 0)

1. $e^x \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \underset{x \to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
2. $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
3. $(1+x)^\alpha \underset{x \to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$
   En particulier, $\frac{1}{1-x} \underset{x \to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$ et $\frac{1}{1+x} \underset{x \to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$.
4. Pour sin, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$\sin(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2p+1}) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$$

   mais, on a aussi

$$\sin(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \boxed{o(x^{2p+2})} \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$$

5. Pour cos, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$\cos(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2p}) \underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots + \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$$

   mais, on a aussi

$$\cos(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \boxed{o(x^{2p+1})} \underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots + \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

6. $\tan(x) \underset{x \to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

7. Pour sh, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2p+1}) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$$

mais, on a aussi

$$\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \boxed{o(x^{2p+2})} \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$$

8. Pour ch, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2p}) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{1x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$$

mais, on a aussi

$$\operatorname{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + \boxed{o(x^{2p+1})} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

9. $\operatorname{th}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.

1.3 Calculs

Proposition 7 (Parité/imparité)

Si f est paire (resp. impaire), son développement limité ne contient que des puissances paires (resp. impaires).

Proposition 8 (Somme, combinaison linéaire)

Soient f et g deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en a, de parties régulières P_n et Q_n. Alors $\lambda f + \mu g$ admet un développement limité à l'ordre n en a, de partie régulière $\lambda P_n + \mu Q_n$.

Définition 9

La troncature à l'ordre p d'une partie régulière $P_n = \sum_{k=0}^{n} b_k(x-a)^k$ est simplement $\sum_{k=0}^{p} b_k(x-a)^k$.

Définition 10

La *forme normalisée* de $a_kx^k + a_{k+1}x^{k+1} + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$ est

$$x^k\left(a_k + a_{k+1}x + \cdots + a_nx^{n-k} + o(x^{n-k})\right).$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Proposition 11 (Produit)

Soient f et g deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en a, de parties régulières P_n et Q_n. Alors fg admet un développement limité à l'ordre n en a, de partie régulière la troncature à l'ordre n de P_nQ_n.

Proposition 12 (Composition)

Soient f et g deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en a, de parties régulières P_n et Q_n. Alors $f \circ g$ admet un développement limité à l'ordre n en a, de partie régulière la troncature à l'ordre n de $P_n \circ Q_n$.

Proposition 13 (Inverse)

Soit f une fonction admettant un dl à l'ordre n en a, **telle que** $f(a) \neq 0$. Alors $\frac{1}{f}$ admet un dl en a à l'ordre n, calculé grâce à la composition de fonctions.

Proposition 14 (Quotient)

Soit f une fonction admettant un dl à l'ordre n en a,telle que $f(x) \sim \lambda(x-a)^\alpha$ et g admettant un dl à l'ordre n en a telle que $g(x) \sim \mu(x-a)^\beta$ avec $\beta \leqslant \alpha$. Alors $\frac{f}{g}$ admet un DL à l'ordre n en a.

Proposition 15

Soit f une fonction admettant un dl à l'ordre n en a, F une primitive de f. Alors F admet un développement limité à l'ordre $n+1$ au voisinage de a, obtenu en primitivant terme à terme le dl de f : si

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n + o((x-a)^n),$$

alors

$$F(x) = F(a) + b_0(x-a) + b_1\frac{x^2}{2} + \cdots + b_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + o((x-a)^{n+1}).$$

Exemple 16

Exemple important : 3 méthodes pour déterminer le dl de tan en 0.

Proposition 17

Si f admet un dl à l'ordre n en a et que f' admet un dl à l'ordre $n-1$ en a, alors la partie régulière du dl à l'ordre $n-1$ de f' est la dérivée de la partie régulière du dl à l'ordre n de f.

Proposition 18

Si f admet un dl à l'ordre n en a, alors $g : x \mapsto f(x+a)$ admet un dl à l'ordre n en 0.