

MPSI1 – Programme de colles  
Semaine 17 – du 2 au 6 février 2026

## Développements limités

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
<b>a) Développements limités</b>	
Développement limité à l'ordre $n$ d'une fonction en un point. Unicité des coefficients, troncature.	Le développement limité à l'ordre $n$ de $f$ en $a$ peut se ramener à celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0. Signe de $f$ au voisinage de $a$ .
Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire. Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1. Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.	On privilégie la factorisation par le terme prépondérant pour prévoir l'ordre d'un développement. Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible.
Primitivation d'un développement limité. Formule de Taylor-Young : pour $f$ de classe $\mathcal{C}^n$ , développement limité à l'ordre $n$ en 0 de $h \mapsto f(a+h)$ . Développement limité à tout ordre en 0 de $\exp$ , $\sin$ , $\cos$ , $\operatorname{sh}$ , $\operatorname{ch}$ , $x \mapsto \ln(1+x)$ , $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ , $x \mapsto (1+x)^\alpha$ , $\operatorname{Arctan}$ .	
Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\tan$ . Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction. Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur.	Calculs d'équivalents et de limites, position relative d'une courbe et de sa tangente, détermination d'asymptotes.
<b>b) Problèmes d'analyse asymptotique</b>	
Exemples de développements asymptotiques, dans les cadres discret et continu : fonctions réciproques, équations à paramètre, suites récurrentes, suites d'intégrales. Formule de Stirling. Traduction comme développement asymptotique de $\ln(n!)$ .	La notion d'échelle de comparaison est hors programme.  La démonstration n'est pas exigible.

Au programme :

- cours de dl et de polynômes (le tout début : cf. les QC ci-dessous)
- exercices de développements limités. On pourra étudier des suites implicites ou des suites récurrentes à cette occasion.

**Exemples de questions de cours**

1. Unicité de la partie régulière d'un dl.
  2. Déterminer le dl de  $\exp$ ,  $\ln$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ , par la formule de Taylor.
  3. Développement limité de  $\tan$  à l'ordre 5 par une méthode au choix.
  4. Degré d'un produit de polynômes.
  5. Degré d'une composée.
  6. Division euclidienne dans  $\mathbb{K}[X]$ .
  7.  $\alpha$  est racine de  $P$  si et seulement si  $X - \alpha$  divise  $P$ .
-