DM12
Facultatif (la JPO, c'est prioritaire !), à rendre entre le 26 janvier et le 31 janvier

Formules possibles.

1. Formule 1, « bases » : Problème 1.A, Problème 2.A (2h)
2. Formule 2, « plus avancée en analyse » : Problème 1.A et Problème 2 (3h)
3. Formule 3, « plus avancée en algèbre » : Problème 1 et Problème 2.A (rq : les deux dernières questions du problème 1 sont difficiles et sont hors barème pour cette formule) (3h)
4. Formule 4, complète : faire les problèmes 1 et 2. (4h)

Précisez en début de DM la formule choisie.

Problème 1. Autour de la trace

A. La trace comme application linéaire

On note $(E_{a,b})_{1\leqslant a,b\leqslant n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Démontrer que pour toutes matrices A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Que vaut $\mathrm{Tr}(AE_{ij})$?
3. **Application.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :
$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{Tr}(AM) = 0.$$
Montrer que A est nulle. Pourquoi est-ce évident dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

On appelle **forme linéaire sur** $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ toute application φ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ vérifiant :
$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \varphi(\lambda A + \mu B) = \lambda\varphi(A) + \mu\varphi(B).$$

4. Soit f une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout M dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $f(M) = \mathrm{Tr}(AM)$
5. Soit ψ une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant : $\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \psi(AB) = \psi(BA)$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout M dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\psi(M) = \lambda\mathrm{Tr}(M)$.

B. Toute matrice de trace nulle est un commutateur

Notre but est d'établir le résultat suivant :

> Soit M une matrice de trace nulle. Alors il existe $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $M = AB - BA$.

B-I. Le cas à diagonale nulle

6. Soit $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et D la matrice diagonale de coefficients diagonaux $(1,2,\dots,n)$. Donner le coefficient (i,j) de $MD - DM$.
7. Soit A une matrice carrée de diagonale nulle. Déterminer une matrice M telle que $A = MD - DM$.

B-II. Un résultat intermédiaire

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de trace nulle. On veut montrer qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{K})$ tel que $A = P^{-1}AP$ soit de diagonale nulle.

8. Pourquoi est-ce évident si $a = 0$?

9. Démontrer que l'une des trois matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 1 & c+d \end{pmatrix}$$

est inversible.

10. Sans perte de généralité, on suppose que $P = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$ est inversible. Montrer alors que $P^{-1}AP$ est à diagonale nulle.

B-III. Conclusion (partie délicate)

11. Démontrer par récurrence sur la dimension que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.
Indication. On prend A de trace nulle, $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On suppose que les a_{ii} ne sont pas tous égaux (sinon c'est évident). On prend un i tel que $a_{ii} \neq a_{i+1,i+1}$. On considère le carré de diagonale a_{ii}, $a_{i+1,i+1}$ de la matrice, que l'on note $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Montrer que l'une des 3 matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 1 & c+d \end{pmatrix}$$

est inversible. Puis, en prenant P l'une de ces matrices, considérer la matrice par blocs $R = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_{n-i-1} \end{pmatrix}$, montrer qu'elle est dans $GL_n(\mathbb{R})$ et faire le produit $R^{-1}AR$.

12. Conclure au résultat désiré.

Problème 2. Méthode d'Euler

A. Questions préliminaires

Les résultats établis dans cette partie pourront être utilisés pour la suite. On établit d'abord la

Proposition 1 (Égalité de Taylor-Lagrange)

Soit φ une fonction deux fois dérivable d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$, a et b deux points de I. Alors il existe c entre a et b tel que $\varphi(b) = \varphi(a) + \varphi'(a)(b-a) + \dfrac{\varphi''(c)}{2}(b-a)^2$.

Pour la preuve, on suppose $a < b$ mais elle s'adapte parfaitement au cas où $a > b$.
On pose $\psi : x \mapsto \varphi(x) - \varphi'(a)(x-a)$.

1. En considérant la fonction $\zeta : x \mapsto \psi(x) - \dfrac{(x-a)^2}{(b-a)^2}(\psi(b) - \psi(a))$, démontrer qu'il existe c dans $]a, b[$ tel que $\psi''(c) = \dfrac{2}{(b-a)^2}(\psi(b) - \psi(a))$. En déduire la proposition voulue.

Correction

Considérons la fonction ζ ainsi citée. Alors ζ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$,

$$\zeta(a) = \psi(a) = \varphi(a),$$

et

$$\zeta(b) = \psi(b) - (\psi(b) - \psi(a)) = \psi(a),$$

donc, d'après le théorème de Rolle, on dispose de d dans $]a, b[$ tel que

$$\zeta'(d) = 0.$$

Mais

$$\zeta'(x) = \psi'(x) - \frac{2(x-a)}{(b-a)^2}(\psi(b) - \psi(a))$$

Donc $\zeta'(a) = \psi'(a) = \varphi'(a) - \varphi'(a) = 0$, donc, ζ' étant continue sur $[a, d]$, dérivable sur $]a, d[$, d'après le théorème de Rolle, on dispose de c dans $]a, d[$ tel que $\zeta''(c) = 0$, c'est-à-dire que

$$\psi''(c) = \frac{2}{(b-a)^2}(\psi(b) - \psi(a))$$

On en déduit alors, comme $\psi''(c) = \varphi''(c)$, que

$$\frac{(b-a)^2}{2}\varphi''(c) = \psi(b) - \psi(a) = \varphi(b) - \varphi'(a)(b-a) - \varphi(a),$$

ou encore que

$$\varphi(b) = \varphi(a) + (b-a)\varphi'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}\varphi''(c).$$

D'où le résultat à prouver !

2. Déduire de l'égalité de Taylor-Lagrange le fait qu'une fonction convexe deux fois dérivable est toujours au-dessus de ses tangentes.

Correction

Soit f une fonction convexe deux fois dérivable. Alors f'' est positive. Donc si $a \in \mathrm{I}$ et $x \in \mathrm{I}$, il existe c entre a et x tel que

$$\varphi(x) = \varphi(a) + (x-a)\varphi'(a) + \frac{\varphi''(c)}{2}(x-a)^2 \geqslant \varphi(a) + (x-a)\varphi'(a),$$

ce qui signifie exactement que la courbe de φ est au-dessus de sa tangente en a.

Pour notre deuxième résultat préliminaire, on considère une suite de réels $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, telle qu'il existe deux réels strictement positifs A et B vérifiant, pour tout k dans $\mathbb{N}$,

$$0 \leqslant a_{k+1} \leqslant (1+A).a_k + B.$$

3. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$0 \leqslant a_n \leqslant (1+A)^n a_0 + \frac{(1+A)^n - 1}{A} B \leqslant \mathrm{e}^{nA} a_0 + \frac{\mathrm{e}^{nA} - 1}{A} B.$$

Correction

On démontre le résultat par récurrence ! L'initialisation est évidente, car $(1+A)^0 a_0 + \dfrac{(1+A)^0 - 1}{A} B = a_0$.

Pour l'hérédité, soit k dans $\mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant a_k \leqslant (1+A)^n a_0 + \dfrac{(1+A)^n - 1}{A} B$. Alors $0 \leqslant a_{k+1}$ et

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &\leqslant A.a_k + B \\
&\leqslant A\left((1+A)^n a_0 + \frac{(1+A)^n - 1}{A} B\right) + B \text{ par hypothèse de récurrence.} \\
&\leqslant A.(1+A)^n a_0 + ((1+A)^n - 1)B + B \\
&\leqslant A(1+A)^n a_0 + (1+A)^n B \leqslant \boxed{(1+A)^{n+1} a_0 + (1+A)^n B.}
\end{aligned}$$

Notre but est donc de démontrer que $(1+A)^n \leqslant \dfrac{(1+A)^{n+1} - 1}{A}$. Or, on a les équivalences

$$\begin{aligned}
(1+A)^n \leqslant \frac{(1+A)^{n+1} - 1}{A} &\Leftrightarrow A(1+A)^n \leqslant (1+A)^{n+1} - 1 \\
&\Leftrightarrow 1 + A.(1+A)^n \leqslant (1+A)^n + A.(1+A)^n \\
&\Leftrightarrow 1 \leqslant (1+A)^n,
\end{aligned}$$

ce qui est vrai. Donc $\boxed{(1+A)^n \leqslant \dfrac{(1+A)^{n+1} - 1}{A}}$, d'où l'hérédité et le résultat !

Ensuite, on remarque que

$$\boxed{(1+A)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1+A)} \leqslant \mathrm{e}^{nA}} \text{ par l'inégalité } \ln(1+x) \leqslant x.$$

Ceci entraîne la seconde inégalité.

B. Description de la méthode

On cherche à approcher les solutions d'une équation différentielle de la forme $y'(t) = F(y(t))$, où F est une fonction dérivable, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, où la fonction inconnue y est une fonction $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$ où $a < b$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Le **schéma d'Euler à $n+1$ points** consiste à poser

- le **pas** de la méthode $h_n = \dfrac{b-a}{n}$,
- les **temps discrétisés** $(t_{n,k})_{0\leqslant k\leqslant n}$ définis par $t_{n,k} = a + kh_n$,
- la suite des **valeurs approchées de la solution** $(y_{n,k})_{0\leqslant k\leqslant n}$ définie par $y_{n,0} = y(a)$ et pour tout k dans $[\![1, n]\!]$,
$$y_{n,k} = y_{n,k-1} + h_n F(y_{n,k-1}).$$

Cette formule s'explique simplement : $y_{n,k}$ est censé être une approximation de $y(t_{n,k})$. Ainsi,

$$\frac{y_{n,k} - y_{n,k-1}}{h_n} \approx \frac{y(t_{n,k}) - y(t_{n,k-1})}{h_n} \approx \frac{y(t_{n,k}) - y(t_{n,k-1})}{t_{n,k} - t_{n,k-1}} \approx y'(t_{n,k-1}) \approx F(y(t_{n,k-1})) \approx F(y_{n,k-1}).$$

4. Proposer un programme Python `euler(F,a,b,y0,n)` qui prend en arguments une fonction `F`, deux flottants `a<b`, une condition initiale `y0`, un entier `n` et qui renvoie deux listes : la liste des temps discrétisés et la liste des valeurs approchées de la solution.

Correction

On propose

```python
def euler(F,a,b,y0,n):
    T = [a]
    t = a
    Y = [y0]
    y = y0
    h = (b-a)/n
    for i in range(n):
        y = y + h*F(y)
        t = t+h
        Y.append(y)
        T.append(t)
    return T,Y
```

C. Preuve de la convergence

Dans cette partie, y est une solution $\mathscr{C}^1$ de l'équation différentielle. On suppose de plus que F est $\mathscr{C}^1$, de dérivée bornée par $K > 0$.

5. Démontrer que y est de classe $\mathscr{C}^2$, que y' et y'' sont bornées sur $[a, b]$.
On note $C = \sup\limits_{t\in[a,b]} |y'(t)|$ et $D = \sup\limits_{t\in[a,b]} |y''(t)|$.

Correction

Déjà, comme $y'(t) = F(y(t))$ pour tout t, comme y est $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ et F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, y' est $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$, donc y est $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$.
y' est donc continue sur **le segment** $[a, b]$ donc, par le théorème des bornes atteintes, elle est bornée et atteint ses bornes.

De même, y'' est continue sur **le segment** $[a, b]$ donc, par le théorème des bornes atteintes, elle est bornée et atteint ses bornes.

6. Démontrer que $\forall (w, z) \in \mathbb{R}^2,\ |F(w) - F(z)| \leqslant K|w - z|$.

Correction

Comme F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $|F'|$ est majorée par K, on en déduit, par l'inégalité des accroissements finis, que pour tous w et z dans $\mathbb{R}$, $|F(w) - F(z)| \leqslant K|w - z|$.

On admettra aussi que pour tous s et t dans $[a, b]$,

$$|y(s) - y(t)| \leqslant C|s - t| \text{ et } |y'(s) - y'(t)| \leqslant D|s - t|.$$

7. On fixe n dans $\mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. Démontrer que

$$|y\left(t_{n,k+1}\right) - y_{n,k+1}| \leqslant \left(h_n.\mathrm{K} + 1\right)|y\left(t_{n,k}\right) - y_{n,k}| + \frac{h_n^2}{2}D$$

On pourra utiliser la question 1.

Correction

On utilise la relation de récurrence ! On sait que

$$y_{n,k+1} = y_{n,k} + h_n F(y_{n,k})$$

et, par la formule de Taylor-Lagrange, il existe c entre $t_{n,k}$ et $t_{n,k+1}$ tel que

$$y(t_{n,k+1}) = y(t_{n,k}) + h_n y'(t_{n,k}) + \frac{h_n^2}{2}y''(c).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
|y\left(t_{n,k+1}\right) - y_{n,k+1}| &= \left|y(t_{n,k}) + h_n y'(t_{n,k}) + \frac{h_n^2}{2}y''(c) - (y_{n,k} + h_n F(y_{n,k}))\right| \\
&= \left|y(t_{n,k}) - y_{n,k} + h_n\left(F(y(t_{n,k})) - F(y_{n,k})\right) + \frac{h_n^2}{2}y''(c)\right| \\
&\leqslant |y(t_{n,k}) - y_{n,k}| + h_n\left|F(y(t_{n,k})) - F(y_{n,k})\right| + \frac{h_n^2}{2}|y''(c)| \\
&\leqslant |y(t_{n,k}) - y_{n,k}| + h_n K\left|y(t_{n,k}) - y_{n,k}\right| + \frac{h_n^2}{2}D \\
&\leqslant \left(h_n.\mathrm{K} + 1\right)|y\left(t_{n,k}\right) - y_{n,k}| + \frac{h_n^2}{2}D.
\end{aligned}$$

D'où le résultat désiré !

On note alors l'erreur d'ordre n

$$\mathrm{err}_n = \max_{0 \leqslant k \leqslant n}|y_{n,k} - y(t_{n,k})|.$$

8. Démontrer que pour tout k dans $[\![0, n]\!]$,

$$\mathrm{err}_n \leqslant \frac{\mathrm{e}^{K(b-a)} - 1}{K}\frac{h_n}{2}D$$

Correction

De la question précédente et la question 3, on déduit que pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$,

$$|y(t_{n,k+1}) - y_{n,k+1}| \leqslant (h_n.\mathrm{K}+1)\,|y(t_{n,k}) - y_{n,k}| + \frac{h_n^2}{2}D,$$

donc, pour tout k dans $[\![0, n]\!]$,

$$|y(t_{n,k}) - y_{n,k}| \leqslant \mathrm{e}^{nh_nK}\,|y(t_{n,0}) - y_{n,0}| + \frac{\mathrm{e}^{nh_nK}-1}{h_nK}\frac{h_n^2}{2}D = \frac{\mathrm{e}^{K(b-a)}-1}{K}\frac{h_n}{2}D,$$

car la méthode d'Euler est initialisée en posant $y_{n,0} = y(a)$. Le majorant précédent étant indépendant de k, on en déduit une majoration de l'erreur comme désiré !

9. En déduire que pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$,

$$\left|\frac{y_{n,k+1} - y_{n,k}}{t_{n,k+1} - t_{n,k}}\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{K(b-a)}-1}{K}D + C.$$

On pourra écrire que $|y_{n,k+1} - y_{n,k}| = |y_{n,k+1} - y(t_{n,k+1}) + y(t_{n,k+1}) - y(t_{n,k}) + y(t_{n,k}) - y_{n,k}|$.

Correction

Soit k dans $[\![0, n-1]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}
|y_{n,k+1} - y_{n,k}| &= |y_{n,k+1} - y(t_{n,k+1}) + y(t_{n,k+1}) - y(t_{n,k}) + y(t_{n,k}) - y_{n,k}| \\
&\leqslant |y_{n,k+1} - y(t_{n,k+1})| + |y(t_{n,k+1}) - y(t_{n,k})| + |y(t_{n,k}) - y_{n,k}| \\
&\leqslant 2\mathrm{err}_n + |y(t_{n,k+1}) - y(t_{n,k})| \\
&\leqslant 2\frac{\mathrm{e}^{K(b-a)}-1}{K}\frac{h_n}{2}D + C|t_{n,k+1} - t_{n,k}|.
\end{aligned}$$

Ainsi, en divisant par $|t_{n,k+1} - t_{n,k}|$, et comme $|t_{n,k+1} - t_{n,k}| = h_n$, on obtient le résultat désiré.

On note de plus g_n la fonction définie ainsi :

- pour tout k dans $[\![0, n]\!]$ $g_n(t_{n,k}) = y_{n,k}$
- g_n est affine sur chaque segment $[t_{n,k}, t_{n,k+1}]$.

10. Démontrer qu'il existe une constante M telle que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![0, n-1]\!]$, pour tous $(r, s) \in [t_{n,k}, t_{n,k+1}]$,

$$|g_n(r) - g_n(s)| \leqslant M|r - s|.$$

Correction

Comme g_n est affine sur $[t_{n,k}, t_{n,k+1}]$, pour tous $(r, s) \in [t_{n,k}, t_{n,k+1}]$ avec $r \neq s$,

$$\frac{g_n(r) - g_n(s)}{r - s} = \frac{g_n(t_{n,k+1}) - g_n(t_{n,k})}{t_{n,k+1} - t_{n,k}} = \frac{y_{n,k+1} - y_{n,k}}{t_{n,k+1} - t_{n,k}}.$$

C'est simplement la pente de la fonction affine ! Ainsi, le résultat est immédiat par la question précédente, avec $M = \dfrac{\mathrm{e}^{K(b-a)}-1}{K}D + C$.

11. Démontrer que pour tout x dans $[a, b]$, $g_n(x) - y(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On pourra, pour x et n fixés, considérer k tel que $x \in [t_{n,k}, t_{n,k+1}]$.

Correction

Soit x dans $[a, b]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit k un entier tel que $x \in [t_{n,k}, t_{n,k+1}]$. Alors

$$\begin{aligned}
|g_n(x) - y(x)| &= |g_n(x) - g_n(t_{n,k}) + g_n(t_{n,k}) - y(t_{n,k}) + y(t_{n,k}) - y(x)| \\
&\leqslant |g_n(x) - g_n(t_{n,k})| + |g_n(t_{n,k}) - y(t_{n,k})| + |y(t_{n,k}) - y(x)| \\
&\leqslant M|x - t_{n,k}| + \mathrm{err}_n + C|t_{n,k} - x| \\
&\leqslant (M + C)h_n + \mathrm{err}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

d'où le résultat désiré !